CAPÍTULO VII

SERIES DE FOURIER. INTEGRAL DE FOURIER

§ 55. SERIES TRIGONOMÉTRICAS DE FOURIER

55.1. DEFINICIÓN DE LA SERIE DE FOURIER. PLANTEAMIENTO DE LOS PROBLEMAS FUNDAMENTALES

Definición 1. *La serie de la forma*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx, \tag{55.1}$$

donde $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *son sucesiones de números reales, se denomina serie trigonométrica.*

Sus sumas parciales son combinaciones lineales de las funciones que componen el sistema

1) $\cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \ldots, \cos nx, \operatorname{sen} nx, \ldots$. (55.2)

Definición 2. *El conjunto de las funciones* (55.2) *se llama sistema trigonométrico.*

Lema 1. *El sistema trigonométrico* (55.2) *posee las siguientes propiedades:*

1) *Una integral, extendida al segmento* $[-\pi, \pi]$, *del producto de dos funciones distintas que integran el sistema es nula (esta propiedad lleva el nombre de ortogonalidad*) del sistema* (55.2)), *es decir,*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx = 0, \quad n \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx\,dx = 0, \quad n \neq m, \tag{55.3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \operatorname{sen} mx\,dx = 0, \quad m, n = 0, 1, 2, \ldots;$$

2) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 nx\,dx = \pi, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{55.4}$$

*) El origen del término "ortogonalidad" se explicará en el p. 58.1.

DEMOSTRACIÓN. Para cualesquiera m, n enteros y no negativos, siendo $m \neq n$, tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x]dx =$$

$$= \left.\frac{\operatorname{sen}(n-m)x}{2(n-m)}\right|_{-\pi}^{\pi} - \left.\frac{\operatorname{sen}(n+m)x}{2(n+m)}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

De modo análogo se demuestran también las otras dos igualdades (55.3).

Demostremos ahora (55.4):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx)dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx)dx = \pi. \ \square$$

Teorema 1. *Sea*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx \tag{55.5}$$

y supongamos que la serie en el segundo miembro de esta igualdad converge uniformemente en el segmento $[-\pi, \pi]$. *Entonces*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{55.6}$$

DEMOSTRACIÓN. Por cuanto la serie, que figura en el segundo miembro de la igualdad (55.5), converge uniformemente en el segmento $[-\pi, \pi]$, mientras que todos sus términos representan funciones continuas en dicho segmento, entonces la suma $f(x)$ de la serie es continua en el segmento $[-\pi, \pi]$ y la propia serie puede ser integrada término a término (véase el p. 36.4) entre los límites de $-\pi$ a π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\right)dx =$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx = \pi a_0.$$

De aquí proviene la primera de las fórmulas (55.6).

Si la serie (55.5) se multiplica, término a término, por $\cos nx$ y $\operatorname{sen} nx$ ($n = 1, 2, \ldots$), las series obtenidas serán también uniformemente convergentes en el segmento $[-\pi, \pi]$ (véase la propiedad 2° en el p. 36.3).

Integrando término a término estas series y utilizando la propiedad de ortogonalidad (55.3) del sistema trigonométrico y las igualdades (55.4), tendremos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos^2 nx\,dx = \pi a_n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen}^2 nx\,dx = \pi b_n.$$

De las correlaciones obtenidas se infiere directamente la fórmula (55.6). □

Hemos de notar ahora que las integrales (55.6) tienen sentido no sólo para las funciones continuas en el segmento $[-\pi, \pi]$, sino también, por ejemplo, para funciones, la integral de las cuales converge absolutamente en este segmento.

Recordemos que el concepto de integral absolutamente convergente (como también el de integral simplemente convergente) se ha introducido sólo para las funciones definidas en cierto intervalo (a, b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, que tienen tal número finito de puntos x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$, $a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_k \leqslant b$, que la función f es integrable según Riemann en cualquier segmento $[\xi_i, \eta_i]$, donde $x_{i-1} < \xi_i < \eta_i < x_i$. En este caso, si $a = -\infty$, entonces $x_0 = -\infty$, y si $b = +\infty$, entonces $x_k = +\infty$. Los números $x_0, x_1, \ldots, x_k$ se denominan *puntos singulares de la función f*.

Si, asumidas estas suposiciones, la integral $\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge, siempre tiene sentido y converge también la integral $\int_a^b f(x)dx$ (véase el p. 33.5).

Las funciones se llaman *absolutamente integrables* en un segmento, si la integral del valor absoluto de dichas funciones converge en el mismo segmento.

Observemos que si una función es integrable según Riemann en cierto segmento, su valor absoluto es también integrable según Riemann en el mismo (véase el p. 28.1) y, por consiguiente, una función integrable según Riemann en un segmento es absolutamente integrable en él.

Si la integral de la función f converge absolutamente en el segmento $[-\pi, \pi]$, todas las integrales (55.6) para dicha función son también convergentes, puesto que representan en sí las integrales del producto de la función absolutamente integrable $f(x)$ por una función acotada (seno o coseno) y, de acuerdo con el lema 2 en el p. 33.5, tales integrales son absolutamente convergentes.

Definición 3. *Supongamos que la función $f(x)$ es absolutamente integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$. La serie trigonométrica* (55.1), *cuyos coeficientes se determinan por la fórmula (55.6), se denomina serie de Fourier**) *o, en forma más detallada, serie trigonométrica de Fourier, mientras que los números a_n y b_n se llaman coeficientes de Fourier de la función f.*

---

*) J. B. Fourier (1768—1830), físico y matemático francés.

En este caso se escribe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx.$$

Las sumas parciales de orden n de esta serie se designarán mediante $S_n(x, f)$ o, de forma más breve, $S_n(x)$. Subrayemos que aquí el signo $\sim$ no es una igualdad asintótica, sino simplemente una correspondencia: a una función se le asigna su serie de Fourier.

El teorema 1 puede parafrasearse en términos mencionados del modo siguiente.

Toda serie trigonométrica uniformemente convergente es la serie de Fourier de su suma.

Ejercicios. 1. Supongamos que la función f es absolutamente integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$ y sea

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx.$$

En este caso, si la función f es par, se tiene $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, si, en cambio, f es una función impar, entonces $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

2. ¿Será la serie trigonométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$$

una serie de Fourier?

En este párrafo se estudiarán las funciones periódicas, es decir, tales funciones f, para cada una de las cuales existe un $T > 0$ tal que, cualquiera que sea x perteneciente al dominio de definición de la función f, los valores $x + T$ y $x - T$ pertenecen también a este campo y se verifica la igualdad

$$f(x + T) = f(x).$$

Las funciones de este género se llaman T-periódicas.

Ejercicio 3. Muéstrese que la función f que es igual a cero en todo punto racional y a uno en todos los puntos irracionales, tiene como su período cualquier número racional y ninguno de los números irracionales puede ser su período.

Sea f absolutamente integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$ y, por consiguiente, se le puede asignar una serie de Fourier. Si la serie citada converge en cierto conjunto, converge hacia una función 2π-periódica, puesto que todos sus términos son 2π-periódicos. Resulta pues cómodo que la propia función f sea "prolongada periódicamente" con el período de 2π. Las comillas se deben a que en la realidad la función f puede ser prolongada periódicamente sólo en el caso en que $f(-\pi) = f(\pi)$.

Si esta condición no se cumple, llamaremos *prolongación de la función f* una función 2π-periódica $\tilde{f}$ que se obtendrá bajo el supuesto de que para cualquier pun-

to $x \in [-\pi, \pi)$ en el que queda definida la función f (recordemos que en virtud de la integrabilidad absoluta de la función f en el segmento $[-\pi, \pi]$ ésta queda definida en todos los puntos del segmento, a excepción, quizás, de su conjunto finito); tenemos

$$\bar{f}(x + 2\pi k) = f(k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Para el caso cuando $f(-\pi) \neq f(\pi)$, tal prolongación conduce a que los valores de las funciones f y $\bar{f}$, para $x = \pi$, no coinciden. No obstante, por cuanto los coeficientes de Fourier de la función se determinan con ayuda de las integrales (55.6), esto no llevará a su cambio y, por lo tanto, las series de Fourier de la función dada f y de la prolongada $\bar{f}$ coinciden.

Diremos que en la mencionada prolongación periódica la función $\bar{f}$ puede no ser continua en los puntos $2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, si la función f es continua para $x = -\pi$ y $x = \pi$. La función prolongada f será continua en los puntos $2\pi k$, si f es continua en $x = -\pi$ y $x = \pi$, con la particularidad de que $f(-\pi) = f(\pi)$. La continuidad en otros puntos se conserva cuando tiene lugar la prolongación periódica: si f es continua en el punto $x \in (-\pi, \pi)$, $\bar{f}$ será continua en cualquier punto $x + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

La función prolongada $\bar{f}$ se denotará con frecuencia mediante el mismo símbolo f que caracteriza la función prolongable.

Si la función f es 2π-periódica, al calcular sus coeficientes de Fourier (véase (55.6)), la integración puede realizarse en cualquier segmento de longitud 2π, por ejemplo, en el segmento $[0, 2\pi]$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx.$$

Efectivamente, si una función φ tiene período igual a T y para cierto número $a \in \boldsymbol{R}$ es integrable sobre el segmento $[a, a + T]$, entonces, cualquiera que sea $b \in \boldsymbol{R}$, será integrable también en el segmento $[b, b + T]$, con la particularidad de que

$$\int_b^{b+T} \varphi(x)dx = \int_a^{a+T} \varphi(x)dx,$$

es decir, la integral $\int_a^{a+T} \varphi(x)dx$ no depende de cómo se elige el número $a \in \boldsymbol{R}$. Esta propiedad de las funciones periódicas se demuestra fácilmente por cambio de variable de integración y recomendamos que el mismo lector lleve a cabo la demostración.

En el § 58 generalizaremos el concepto de serie trigonométrica de Fourier, a saber, definiremos y estudiaremos las series de Fourier referidas a un sistema ortogonal arbitrario de funciones. Ahora, en el párrafo presente, sólo se estudiarán las series trigonométricas de Fourier de las funciones absolutamente integrables (véase también el p. 58.6).

Ante todo se estudiará la cuestión sobre las condiciones que garantizan la convergencia de la serie de Fourier. En el caso de que la serie de Fourier de una función dada $f(x)$ converja bajo ciertas condiciones, se aclarará a qué es igual su suma $S(x)$ y, en particular, cuando coincide con la función $f(x)$. Se estudiará la "velocidad" de convergencia de las series de Fourier y las condiciones de que ésta depende. Se mostrará que incluso en el caso cuando la serie de Fourier de una función continua diverge en ciertos puntos (ejemplos de tales series existen), a base de la serie puede restablecerse la propia función en todos los puntos. Veremos, en fin, que desde cierto punto de vista resulta natural considerar la convergencia de las series de Fourier no sólo en el sentido habitual (como convergencia de una sucesión de las sumas parciales en un punto o convergencia uniforme), sino de manera sumamente diferente, a saber, en el sentido de la media cuadrática (véanse los pp. 55.8 y 55.9).

55.2. COEFICIENTES DE FOURIER QUE TIENDEN A CERO

Es de gran importancia en la teoría de las series trigonométricas el hecho de que los coeficientes de Fourier de una función absolutamente integrable tienden hacia cero cuando $n \to \infty$. Se deduce el hecho de una afirmación algo más general que se demuestra abajo y se emplea frecuentemente en las investigaciones concernientes a las series de Fourier y los problemas contiguos.

Teorema 2 (de Riemann). *Si la función f es absolutamente integrable en el intervalo (a, b), sea éste finito o infinito, entonces*

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_a^b f(x) \cos \nu x dx = \lim_{\nu \to \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen} \nu x dx = 0.$$

Corolario. *Los coeficientes de Fourier* (55.6) *de una función absolutamente integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$ tienden hacia cero cuando $n \to \infty$.*

Antes de demostrar estas afirmaciones, introduzcamos algunas nociones que en adelante serán de empleo frecuente.

Definición 4. *Para cualquier función f, definida en todo el eje numérico, la clausura de un conjunto de puntos en los cuales $f(x) \neq 0$ lleva el nombre de portador de la función y se designa* $\operatorname{supp} f$ *).

Definición 5. *Una función f, definida en todo el eje numérico, se denomina finita, siempre que su portador está contenido en cierto segmento finito.*

Definición 6. *Para todo conjunto X dispuesto en una recta numérica, la función*

$$\chi(x) = \chi_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in X, \\ 0, & \text{si } x \notin X, \end{cases}$$

recibe el nombre de función característica del conjunto X.

*) Proviene de la palabra latina supportus.

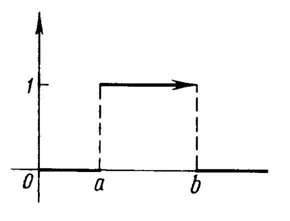


Fig. 230

En la fig. 230 se expone la función característica de un semiintervalo del tipo $[a, b)$.

Definición 7. *Una función f, definida en todo el eje numérico, se llama escalonada finita, siempre que es combinación lineal de un número finito de funciones características de los semiintervalos disjuntos dos a dos $[a_i, b_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, es decir, si puede ser representada en la forma*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \chi_i(x) \tag{55.7}$$

(fig. 231), *donde $\chi_i(x)$ es la función característica del intervalo $[a_i, b_i)$ y λ_i, $i = 1, \dots, m$, son ciertos números reales.*

No es difícil convencerse de que si no se requiere que los semiintervalos $[a_i, b_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, sean disjuntos dos a dos, se obtendrá una definición equivalente. Esto se deduce de que la intersección de un número finito de los semiintervalos acotados en consideración es también un semiintervalo del mismo tipo.

Evidentemente, toda función de la forma (55.7) es finita.

Una función escalonada finita f es integrable en todo el eje numérico y, además, si está dada por la fórmula (55.7), entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_i(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \int_{a_i}^{b_i} dx = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(b_i - a_i).$$

Ejercicio 4. Demuéstrese que cualquier función continua en un segmento es el límite de una sucesión uniformemente convergente de las funciones escalonadas finitas cuyos portadores pertenecen al mismo segmento.

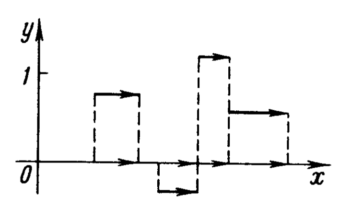


Fig. 231

Lema 2. *Para cualquier función f, absolutamente integrable en un intervalo finito o infinito de extremos a y b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, existe una sucesión de tales funciones escalonadas finitas φ_n, $n = 1, 2, \dots$, que*

1°) $\operatorname{supp} \varphi_n \subset (a, b)$,

2°) $\lim\limits_{n \to \infty} \int_a^b |f(x) - \varphi_n(x)| dx = 0.$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la función f es absolutamente integrable en un intervalo cuyos extremos son a y b. Admitamos, para concretar, que es integrable en cualquier segmento

$$[\xi, \eta], \quad -\infty \leqslant a < \xi < \eta < b \leqslant +\infty$$

(el caso general de una función absolutamente integrable, véase el p. 55.1, se reduce con facilidad al caso que se considera). Entonces, de acuerdo con la definición de integral impropia, para cualquier número fijo $\varepsilon > 0$ existen tales números ξ y η que

$$\int_a^\xi |f(x)| dx + \int_\eta^b |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{55.8}$$

La función f es integrable según Riemann en el segmento $[\xi, \eta]$ y, por consiguiente, si designamos con s_τ la suma inferior de Darboux de la función f, correspondiente a cierta partición τ del segmento $[\xi, \eta]$, tendremos

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \int_\xi^\eta f(x)dx,$$

donde δ_τ es la finura de la partición τ. Por ello, existe una partición $\tau_0 = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ del segmento $[\xi, \eta]$ tal que si s_{τ_0} es la suma inferior de Darboux para la función f, correspondiente a la partición τ_0, es decir, si

$$s_{\tau_0} = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i, \quad m_i = \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x),$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

entonces

$$0 \leqslant \int_\xi^\eta f(x)dx - s_{\tau_0} < \frac{\varepsilon}{2},$$

donde ε es el número fijado anteriormente.

Pongamos

$$\varphi(x) = \begin{cases} m_i, & \text{si } x_{i-1} \leqslant x < x_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \\ 0, & \text{si } x < \xi \text{ ó } x \geqslant \eta. \end{cases} \tag{55.9}$$

Evidentemente, $\varphi(x)$ es la función escalonada finita,

$$\operatorname{supp}\varphi \subset [\xi, \eta] \subset (a, b) \quad \text{y} \quad \int_\xi^\eta \varphi(x)dx = \sum_{i=1}^k m_i \Delta x_i = s_{\tau_0}.$$

Por consiguiente,

$$\int_\xi^\eta \left[f(x) - \varphi(x)\right]dx = \int_\xi^\eta f(x)dx - \int_\xi^\eta \varphi(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (55.10)$$

con la particularidad de que por cuanto $\varphi(x) \leqslant f(x)$, $\xi \leqslant x < \eta$, entonces

$$f(x) - \varphi(x) = |f(x) - \varphi(x)| \geqslant 0.$$

De las desigualdades (55.8) y (55.10) tenemos:

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|dx = \int_a^\xi |f(x)|dx + \int_\xi^\eta [f(x) - \varphi(x)]dx + \int_\eta^b |f(x)|dx < \varepsilon.$$

Suponiendo, por ejemplo, $\varepsilon = \frac{1}{n}$ y denotando las correspondientes funciones escalonadas finitas φ mediante φ_n, $n = 1, 2, \dots$, obtendremos una sucesión de funciones escalonadas finitas φ_n, para la cual se cumple la afirmación del lema. □

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Sea $\chi(x)$ la función característica del semiintervalo $[\xi, \eta)$. Para todo intervalo $(a, b) \supset [\xi, \eta]$ tendremos

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_a^b \chi(x) \operatorname{sen} \nu x dx = \lim_{\nu\to\infty} \int_\xi^\eta \operatorname{sen} \nu x dx = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\cos \nu\xi - \cos \nu\eta}{\nu} = 0,$$

pues

$$\left|\frac{\cos \nu\xi - \cos \nu\eta}{\nu}\right| \leqslant \frac{|\cos \nu\xi| + |\cos \nu\eta|}{\nu} \leqslant \frac{2}{\nu} \to 0, \quad \nu \to \infty.$$

Por cuanto cualquier función escalonada finita es una combinación lineal de un número finito de funciones características de los semiintervalos del tipo considerado, la afirmación del teorema queda válida también para toda función escalonada finita.

Ahora, si la función f es absolutamente integrable sobre el intervalo de extremos a y b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, para cualquier número $\varepsilon > 0$, con arreglo al lema, existe una función escalonada finita φ tal que

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para esta función escalonada (por cuanto para las funciones escalonadas el teorema ya ha sido demostrado) existe tal ν_ε que con $|\nu| \geqslant \nu_\varepsilon$

$$\left|\int_a^b \varphi(x) \operatorname{sen} \nu x dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por ello, al hacer uso de la identidad $f(x) = [(f(x) - \varphi(x)] + \varphi(x)$, para $|\nu| \geqslant \nu_\varepsilon$ obtendremos

$$\left|\int_a^b f(x)\operatorname{sen}\nu x dx\right| \leqslant \left|\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\operatorname{sen}\nu x dx\right| + \left|\int_a^b \varphi(x)\operatorname{sen}\nu x dx\right| \leqslant \int_a^b \left|f(x) - \varphi(x)\right| dx + \left|\int_a^b \varphi(x)\operatorname{sen}\nu x dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto es indicio de que $\lim\limits_{\nu\to\infty} \int_a^b f(x)\operatorname{sen}\nu x dx = 0.$

De modo análogo se demuestra que

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_a^b f(x)\cos\nu x dx = 0. \ \square$$

55.3. INTEGRAL DE DIRICHLET. PRINCIPIO DE LOCALIZACIÓN

Sea la función $f(x)$ absolutamente integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$. Hallemos una expresión, cómoda para investigar, de la suma parcial $S_n(x; f)$ de la serie de Fourier de la función f, llamada también simplemente *suma de Fourier de n-ésimo orden*, $i = 0, 1, 2, \dots$, *de dicha función*. Al sustituir en $S_n(x; f)$ la expresión para los coeficientes de Fourier (55.6), obtendremos

$$S_n(x; f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt \cos kx + \operatorname{sen} kt \operatorname{sen} kx) \ dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t - x)\right]dt. \qquad (55.11)$$

Pongamos

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt, \qquad (55.12)$$

entonces la fórmula (55.11) se escribirá en la forma

$$S_n(x; f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t - x)f(t)dt. \qquad (55.13)$$

La función $D_n(t)$ se llama *núcleo de Dirichlet* y la integral que figura en el segundo miembro de la igualdad (55.13), *integral de Dirichlet*.

Lema 3. *El núcleo de Dirichlet*:

1) *es una función par continua* 2π-periódica, con la particularidad de que

$$D_n(0) = n + \frac{1}{2};$$

2) *satisface la condición*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1; \qquad (55.14)$$

3) *cuando* $t \neq 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$:

$$D_n(t) = \frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}. \qquad (55.15)$$

DEMOSTRACIÓN. La continuidad, la paridad y la existencia de un *período*, igual a 2π, para el núcleo de Dirichlet $D_n(t)$ se desprenden inmediatamente de su definición, es decir, de la fórmula (55.12). De la misma fórmula se infiere también la igualdad (55.14): para obtenerla, es suficiente integrar en el segmento $[-\pi, \pi]$ ambos miembros de la igualdad (55.12):

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dt + \sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\,dt = \pi,$$

pues, cuando $k = 1, 2, \dots$: $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\,dt = 0.$

Demostremos ahora la fórmula (55.15). Tenemos:

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt = \frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\left(\operatorname{sen}\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\operatorname{sen}\frac{t}{2}\cos kt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\left[\operatorname{sen}\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{sen}\frac{2k+1}{2}t - \operatorname{sen}\frac{2k-1}{2}t\right)\right] =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}, \quad t \neq 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Observemos que por ser par el núcleo de Dirichlet,

$$\int_{-\pi}^{0} D_n(t)dt = \int_{0}^{\pi} D_n(t)dt,$$

por lo cual

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 2\int_{0}^{\pi} D_n(t)dt.$$

De aquí y de la propiedad 2° del núcleo de Dirichlet se deduce que

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)dt = 1. \qquad (55.16)$$

Indiquemos, además, que el segundo miembro de la igualdad (55.15) tiene sentido sólo cuando $t \neq 2\pi k$, siendo k entero. Pero, como

$$\lim_{t\to 2k\pi}\frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}} = \lim_{t\to 2k\pi} D_n(t) = n + \frac{1}{2},$$

la función $\dfrac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}$ puede ser definida adicionalmente para $t = 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, considerando que su valor en cada uno de estos puntos es igual, por definición, a $n + \frac{1}{2}$. Una función, definida adicionalmente de este modo, es continua para $t = 2\pi k$, cualquiera que sea k entero.

Volvamos a considerar la función f, absolutamente integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$. Para nosotros será de interés, en particular, el límite de la sucesión de sumas parciales $S_n(x)$ de su serie de Fourier. Hemos de notar que el paso directo al límite, para $n \to \infty$, en el segundo miembro de la igualdad (55.13), es decir, el paso al límite bajo el signo de integral, no es posible, puesto que el límite del núcleo de Dirichlet para $n \to \infty$ no existe. Prolongamos la función f desde el semiintervalo $[-\pi, \pi)$ en una función 2π-periódica y designémosla también con f (véase en el p. 55.1 la información más detallada sobre la prolongación periódica).

Demostremos el siguiente lema.

Lema 4. *Para la suma parcial de Fourier* $S_n(x; f)$ *de una función* 2π*-periódica absolutamente integrable* f *son válidas las fórmulas*

$$S_n(x; f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)f(x + t)dt \qquad (55.17)$$

y

$$S_n(x;f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]dt. \qquad (55.18)$$

Corolario. *Para cualesquiera $\delta \in (0, \pi)$, $x \in [-\pi, \pi]$ la suma parcial $S_n(x;f)$ de la serie de Fourier de una función 2π-periódica absolutamente integrable f posee la siguiente representación integral asintótica:*

$$S_n(x;f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]dt + o(1), \quad n \to \infty. \qquad (55.19)$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Realicemos en la integral de Dirichlet (55.13) el cambio de variable de integración $u = t - x$:

$$S_n(x;f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x)f(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} D_n(u)f(x+u)du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)f(x+u)du. \qquad (55.20)$$

Aquí hemos aprovechado otra vez la circunstancia de que la integral de una función periódica extendida al segmento cuya longitud es igual al período de la función, no depende de la posición de dicho segmento en el eje real (véase el p. 55.1) y hemos aplicado esta propiedad a la función $D_n(u)f(x+u)$ que es 2π-periódica según u. Así pues, la fórmula (55.17) queda demostrada.

Con el objeto de demostrar la fórmula (55.18), representemos el segundo miembro de la igualdad (55.20) en forma de una suma de dos integrales cuyos intervalos de integración son $[-\pi, 0]$ y $[0, \pi]$; en la primera integral realicemos el cambio de variable $u = -t$ y hagamos uso de que el núcleo de Dirichlet es par:

$$D_n(-u) = D_n(u)$$

(véase el lema 3). Como resultado tendremos:

$$S_n(x;f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)f(x+u)du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} D_n(u)f(x+u)du + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(u)f(x+u)du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)f(x-t)dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(u)f(x+u)du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]dt.$$

La fórmula (55.18) también queda demostrada. □

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Fijemos un número δ, $0 < \delta < \pi$, y representemos el segundo miembro de (55.18) como una suma de dos integrales de la manera siguiente:

$$S_n(x;f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}. \qquad (55.21)$$

Por cuanto la función $\dfrac{1}{2\,\mathrm{sen}\frac{t}{2}}$ es continua y, por lo tanto, acotada en el segmento $[\delta, \pi]$ $\left(\text{a saber, para todo } t \in [\delta, \pi] : 0 < \dfrac{1}{2\,\mathrm{sen}\frac{t}{2}} \leqslant \dfrac{1}{2\,\mathrm{sen}\frac{\delta}{2}}\right)$, mientras la función $f(x+t) + f(x-t)$, para cualquier $x \in [-\pi, \pi]$ fijo es 2π-periódica según t y absolutamente integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$, entonces en $[\delta, \pi]$ será absolutamente integrable también el producto de dichas funciones $\dfrac{f(x+t) + f(x-t)}{2\,\mathrm{sen}\frac{t}{2}}$. Por esta razón, de acuerdo con el teorema de Riemann (véase el teorema 2 en el p. 55.2), la segunda integral en el segundo miembro de la igualdad (55.21) tiende hacia cero cuando $n \to \infty$, es decir,

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2\,\mathrm{sen}\frac{t}{2}}\,\mathrm{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)t\,dt = o(1), \quad n \to \infty.$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula (55.21), obtendremos la (55.19). □

De la fórmula (55.19) se infiere una propiedad importante de las series de Fourier, llamada principio de localización. Enunciémoslo en forma de un teorema.

Teorema 3 (principio de localización). *Si f es una función 2π-periódica absolutamente integrable, la existencia y el valor del límite de la sucesión de sus sumas parciales de Fourier $S_n(x;f)$ en todo punto $x_0 \in [-\pi, \pi]$ depende sólo de la existencia y del valor del límite, para $n \to \infty$ de la integral*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} D_n(t)[f(x_0+t) + f(x_0-t)]dt,$$

donde δ es un número positivo tan pequeño como se quiera.

Subrayemos que en la expresión subintegral de la integral citada figuran sólo los valores de la función f en el segmento $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ y, de este modo, la existen-

cia y el valor del límite de las sumas parciales de la serie de Fourier de la función f sólo dependen de sus propiedades en el entorno del punto x_0, o, como suele decirse, de sus propiedades locales en las cercanías del punto x_0.

Del principio de localización proviene que si en un entorno, tan pequeño como se quiera, del punto x_0 las funciones f y g coinciden, entonces los límites $\lim_{n\to\infty} S(x_0; f)$ y $\lim_{n\to\infty} S(x_0; g)$ existen o no simultáneamente con la particularidad de que si dichos límites existen, son iguales. Es de interés particular que las series de Fourier de tales funciones son, en el caso general, diferentes, pues en las fórmulas para los coeficientes de Fourier figuran los valores de la función en todo el segmento $[-\pi, \pi]$.

55.4. CONVERGENCIA DE LA SERIE DE FOURIER EN UN PUNTO

En este punto se considerarán las funciones 2π-periódicas absolutamente integrables en un segmento de longitud 2π, las cuales tienen sólo puntos de discontinuidad de primera especie, a consecuencia de lo cual en todo punto x_0 del eje numérico existen límites unilaterales:

$$\lim_{h\to+0} f(x_0 + h) = f(x_0 + 0), \quad \lim_{h\to+0} f(x_0 - h) = f(x_0 - 0).$$

Definición 8 (de Lebesgue *)). *Un punto x_0 se llama punto regular de la función f, si*

$$f(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

Evidentemente, todo punto de continuidad de una función es su punto regular.

Si x_0 es un punto de discontinuidad de primera especie, a título de sus derivadas unilaterales $f'_+(x)$ y $f'_-(x)$ intervendrán los límites

$$f'_+(x) = \lim_{h\to+0} \frac{f(x + h) - f(x + 0)}{h},$$

$$f'_-(x) = \lim_{h\to+0} \frac{f(x - h) - f(x - 0)}{-h}.$$

En aquel caso cuando la función es continua en el punto x, y, por ende, $f(x + 0) = f(x - 0) = f(x)$, la definición enunciada de las derivadas unilaterales coincide con la aducida anteriormente (véase el p. 9.1).

Para que la enunciación del teorema sobre la convergencia de la serie de Fourier sea más cómoda, introduzcamos una designación

$$f_x^*(t) \overset{\text{def}}{=} f(x + t) + f(x - t) - f(x + 0) - f(x - 0). \qquad (55.22)$$

Es obvio que en el punto regular x la función $f_x^*(t)$ tiene por expresión

$$f_x^*(t) = f(x + t) + f(x - t) - 2f(x).$$

*) H. L. Lebesgue (1875—1941), matemático francés.

Nos hará falta el siguiente lema sencillo.

Lema 5. *Para la función f, 2π-periódica y absolutamente integrable en el segmento de longitud 2π, las integrales*

$$\int_0^\delta \frac{|f_x^*(t)|}{t}\,dt, \quad 0 < \delta \leqslant \pi, \quad y \int_0^\pi \frac{|f_x^*(t)|}{2\,\text{sen}\,\frac{t}{2}}\,dt \qquad (55.23)$$

convergen o divergen simultáneamente.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, para cualquier δ, $0 < \delta < \pi$ la función $\frac{1}{2\,\text{sen}\,\frac{t}{2}}$ es continua y, por ende, integrable según Riemann en el segmento $[\delta, \pi]$. Entre tanto, la función $f_x^*(t)$ (x es fijo) es absolutamente integrable en dicho segmento y, por consiguiente, el producto $\frac{f_x^*(t)}{2\,\text{sen}\,\frac{t}{2}}$ es también absolutamente integrable en el segmento $[\delta, \pi]$, es decir, para cualquier δ, $0 < \delta < \pi$, la integral

$$\int_0^\pi \frac{|f_x^*(t)|}{2\,\text{sen}\,\frac{t}{2}}\,dt \qquad (55.24)$$

converge (véase el lema 2 en el p. 33.5).

Elijamos ahora un $\delta > 0$ de modo tal que en el segmento $[0, \delta]$ la función $f_x^*(t)$ no tenga puntos singulares (véase el p. 55.1), a excepción, quizás, del punto $t = 0$, es decir, que para todo ε, $0 < \varepsilon < \delta$, sea integrable según Riemann en el segmento $[\varepsilon, \delta]$; esto es siempre factible, puesto que la supuesta integrabilidad absoluta de la función f estipula que f y, por consiguiente, también f_x^* sólo disponen de un número finito de puntos singulares (véase de nuevo el p. 55.1).

Ahora diremos que las funciones $\frac{f_x^*(t)}{t}$ y $\frac{f_x^*(t)}{2\,\text{sen}\,\frac{t}{2}}$ son equivalentes para $t \to 0$, pues

$$\lim_{t\to 0} \frac{2\,\text{sen}\,\frac{t}{2}}{t} = 1;$$

por lo cual, de acuerdo con el criterio de convergencia de las integrales, llamado criterio de comparación (véase el corolario del teorema 1 en el p. 33.3), aplicado a las magnitudes absolutas de las funciones en consideración, las integrales

$$\int_0^\delta \frac{|f_x^*(t)|}{t}\,dt, \quad \int_0^\delta \frac{|f_x^*(t)|}{2\,\text{sen}\,\frac{t}{2}}\,dt$$

convergen o divergen simultáneamente. Siendo convergente la integral (55.24), de aquí se deduce de inmediato que las integrales (55.23) también convergerán o divergerán simultáneamente. □

Teorema 4 (criterio de Dini). *Supongamos que una función 2π-periódica f es absolutamente integrable en un segmento de longitud 2π.*

En este caso, si x es punto de continuidad o punto de discontinuidad de primera especie y, para cierto δ, $0 < \delta < \pi$, la integral

$$\int_0^\delta \left| \frac{f_x^*(t)}{t} \right| dt \tag{55.25}$$

converge, entonces la serie de Fourier de la función f converge en el punto x hacia el valor

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \tag{55.26}$$

Corolario 1. *Cumplidas las condiciones del teorema, en cualquier punto regular de la función f (en particular, en todos los puntos de continuidad de f) la serie de Fourier de dicha función converge hacia su valor en el punto que se considera.*

Corolario 2. *Si f es una función 2π-periódica absolutamente integrable en un segmento de longitud 2π y si en el punto x existen $f(x+0), f(x-0), f'_+(x)$ y $f'_-(x)$, entonces la serie de Fourier de la función converge en el punto dado hacia el valor* (55.26).

Corolario 3. *La serie de Fourier de una función f, continuamente derivable a trozos en el segmento $[-\pi, \pi]$, converge en todo punto del intervalo $(-\pi, \pi)$ hacia el valor* (55.26), *y en los puntos $x = -\pi$ y $x = \pi$, al valor*

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}. \tag{55.27}$$

Corolario 4. *La serie de Fourier de una función continua derivable a trozos en el segmento $[-\pi, \pi]$ converge en todo punto del intervalo $(-\pi, \pi)$ hacia el valor de la función en este punto y en los puntos $x = -\pi$ y $x = \pi$, al valor* (55.27).

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Al utilizar las fórmulas (55.18) y (55.16), tendremos

$$S_n(x;f) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]dt - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\frac{2}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)]dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f_x^*(t)}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}} \operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt. \tag{55.28}$$

Supongamos que la integral (55.25) es convergente. En este caso, según el lema 5, converge también la integral

$$\int_0^\pi \frac{|f_x^*(t)|}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,dt,$$

en otras palabras, la función $\dfrac{f_x^*(t)}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}$ es absolutamente integrable en el segmento $[0, \pi]$. Por eso, de acuerdo con el teorema de Riemann (véase el p. 55.2),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f_x^*(t)}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt = 0,$$

por consiguiente, en virtud de (55.28):

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x;f) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \ □$$

El corolario 1 proviene inmediatamente del teorema, en virtud de la definición de punto regular de una función. □

Demostraremos el corolario 2. De conformidad con el teorema 4, basta probar que si existen los límites $f(x+0), f(x-0)$ y las derivadas unilaterales $f'_+(x), f'_-(x)$, la integral (55.25) converge para cierto $\delta > 0$. Ante todo, debido a la existencia del límite finito

$$\lim_{t\to 0}\frac{f_x^*(t)}{t} = \lim_{t\to 0}\left[\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} + \right.$$
$$\left. + \frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\right] = f'_+(x) - f'_-(x),$$

la función $\dfrac{f_x^*(t)}{t}$ está acotada en cierto entorno del punto $t = 0$. Por eso existe tal δ, $0 < \delta < \pi$, que en el segmento $[0, \delta]$ la función $\dfrac{f_x^*(t)}{t}$ está acotada y, por lo tanto, no tiene puntos singulares, a consecuencia de lo cual es integrable según Riemann en este segmento (véase el p. 33.1, como también la observación 4 en el p. 44.7). Una función, integrable según Riemann es integrable absolutamente, razón por la cual la integral (55.25) es finita. □

Con el fin de demostrar el corolario 3, prolongamos la función f, definida en el segmento $[-\pi, \pi]$, de una manera periódica con el período igual a 2π desde el semiintervalo $[-\pi, \pi)$ a todo el eje numérico y designemos la función obtenida con $\tilde{f}$. Por definición de la derivabilidad a trozos (véase la definición 1 en el p. 30.2), la función $\tilde{f}$ satisface las condiciones del corolario 2. De conformidad con este corolario, la serie de Fourier de la función $\tilde{f}$, que coincide, evidentemente, con la serie de

Fourier para f, converge en todo punto x hacia

$$\frac{\bar{f}(x+0)+\bar{f}(x-0)}{2}.$$

Si $x \in (-\pi, \pi)$, se tiene $\bar{f}(x \pm 0) = f(x \pm 0)$ y, por lo tanto, $\frac{\bar{f}(x+0)+\bar{f}(x-0)}{2} = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Cuando $x = -\pi$, la serie mencionada converge hacia $\frac{\bar{f}(-\pi+0)+\bar{f}(-\pi-0)}{2}$, y si $x = \pi$, hacia el valor $\frac{\bar{f}(\pi+0)+\bar{f}(\pi-0)}{2}$. Dado que $\bar{f}$ es periódica, se tiene

$$\bar{f}(-\pi-0) = \bar{f}(\pi-0) = f(\pi-0), \bar{f}(\pi+0) = \bar{f}(-\pi+0) = f(-\pi+0).$$

Por esto

$$\frac{\bar{f}(-\pi+0)+\bar{f}(-\pi-0)}{2} = \frac{\bar{f}(\pi+0)+\bar{f}(\pi-0)}{2} = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}. \square$$

El corolario 4 proviene directamente de los corolarios 1 y 3. □

Ha de ser notado que en las fórmulas (55.26) y (55.27) la suma de la serie de Fourier de la función f viene expresada en términos de la propia función f, definida en el segmento $[-\pi, \pi]$, y no mediante su prolongación periódica $\bar{f}$ a todo el eje numérico.

Si la función f satisface las condiciones del corolario 4, es decir, es continua y derivable a trozos en el segmento $[-\pi, \pi]$ y, además, $f(-\pi) = f(\pi)$ (es decir, su prolongación periódica a todo el eje numérico coincide con ella en todo punto de $[-\pi, \pi]$, incluidos los extremos), entonces en todo el segmento $[-\pi, \pi]$ la función f es igual a la suma de su serie de Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx.$$

Por esta razón tal función en todo punto del segmento $[-\pi, \pi]$ puede ser representada con cualquier grado de precisión por la suma parcial de su serie de Fourier, es decir, por una combinación lineal de senos y cosenos de los arcos múltiples (suele decirse también que la función citada se aproxima por la suma de armónicos sencillos *)). El hecho de que en el caso dado el período es igual precisamente a 2π no es esencial: el caso en que el período arbitrario $T > 0$ se reduce con facilidad al considerado, simplemente por cambio de variable (véase el p. 55.12).

Ejemplos. 1. Hallemos la serie de Fourier de la función $\operatorname{ch} x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

*) Se llama armónico sencillo (en la física, principalmente) una expresión de la forma $A \cos nx + B \operatorname{sen} nx$, donde A y B son unas constantes, n es un número natural.

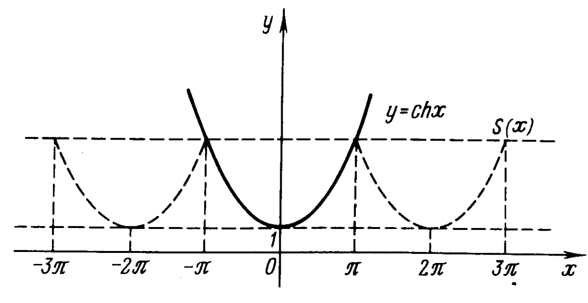


Fig. 232

Calculemos sus coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch} x\, dx = \frac{\operatorname{sh} x}{\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch} x \cos nx\, dx = (-1)^n \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi(1+n^2)}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

De lo que la función $\operatorname{ch} x$ es par se deduce que para ella $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. La función $\operatorname{ch} x$ es continuamente derivable y, por lo tanto, satisface las condiciones del corolario 4 del teorema 4; además, la función toma valores iguales en los extremos del segmento $[-\pi, \pi]$, por lo cual su serie de Fourier en todos los puntos del segmento $[-\pi, \pi]$ converge hacia la propia función $\operatorname{ch} x$:

$$\operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\pi} (-1)^n \frac{1}{1+n^2} \cos nx\right).$$

Esta serie converge uniformemente, lo que se desprende de su comparación con la serie numérica convergente $\sum_{n=0}^{\pi} \frac{1}{1+n^2}$.

Las gráficas de la función $\operatorname{ch} x$ y de la suma $S(x)$ de la serie de Fourier correspondiente se exponen en la fig. 232.

2. Hallemos la serie de Fourier de la función $\operatorname{sh} x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

En virtud de que esta función es impar, tenemos

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots ,$$

y, luego,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sh} x \operatorname{sen} nx\, dx = (-1)^{n-1} \frac{2n \operatorname{sh} \pi}{\pi(1+n^2)}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

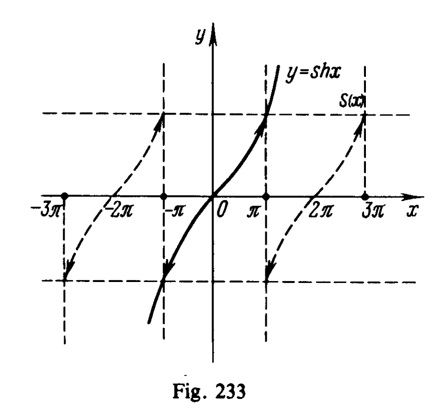


Fig. 233

La función sh x es continuamente derivable y satisface las condiciones del corolario 4 del teorema 4, pero sh $(-\pi) \neq$ sh π; por eso, en todos los puntos del intervalo $(-\pi, \pi)$ la serie de Fourier de la función sh x converge hacia la propia función:

$$\operatorname{sh} x = \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{1+n^2} \operatorname{sen} nx, \quad -\pi < x < \pi$$

y en los puntos $x = -\pi$ y $x = \pi$, hacia el valor $\dfrac{\operatorname{sh}(-\pi) + \operatorname{sh} \pi}{2} = 0.$

La serie de Fourier de la función sh x ya no converge uniformemente hacia la función en todo el segmento $[-\pi, \pi]$ (en efecto, de lo contrario su suma debería ser continua en el segmento $[-\pi, \pi]$, mientras que ella tiene discontinuidades en sus extremos). Las gráficas de las funciones sh x y de la suma $S(x)$ de su serie de Fourier están expuestas, para la comparación, en la fig. 233.

3. Desarrollemos la función

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,$$

en la serie de Fourier.

Aunque la función f parece ser algo artificial, su serie de Fourier es de la forma muy sencilla y permite obtener toda una serie de fórmulas interesantes.

Prolongamos, de manera 2π-periódica, la función f desde el semiintervalo $[0, 2\pi)$ a todo el eje numérico. De resultas se obtendrá una función impar, en virtud de lo cual todos sus coeficientes de Fourier a_n serán nulos; $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Calculemos los coeficientes b_n. Integrando por partes, obtendremos

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \operatorname{sen} nx dx =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} (\pi - x) \frac{\cos nx}{n} \Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n}.$$

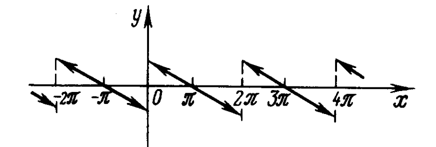


Fig. 234

Así pues,

$$\frac{\pi - x}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}. \tag{55.29}$$

En virtud del corolario 4 del teorema 4, para $0 < x < 2\pi$ tiene lugar la igualdad

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}. \tag{55.30}$$

Cuando $x = 0$, esta igualdad, evidentemente, no se verifica, puesto que la suma de la serie obtenida para $x = 0$ es nula y $f(0) \neq 0$.

La gráfica de la suma de la serie (55.29) va expuesta en la fig. 234. Diremos que esta serie a ciencia cierta no converge uniformemente en el segmento $[0, 2\pi]$, puesto que su suma no es en éste una función continua (la convergencia uniforme de la serie (55.29) se ha investigado en el p. 36.3).

Al sustituir en (55.30) x por $2x$ y dividir ambos miembros de la igualdad obtenida por 2, obtendremos

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2kx}{2k}, \quad 0 < x < \pi. \tag{55.31}$$

Sustrayamos esta igualdad de (55.30):

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2k-1)x}{2k-1}, \quad 0 < x < \pi. \tag{55.32}$$

Al sustituir la expresión obtenida para $\dfrac{\pi}{4}$ en (55.31), obtenemos

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}.$$

Esta igualdad es justa ya para $x = 0$, y, en virtud de que ambos miembros de la igualdad son impares, también para $-\pi < x < 0$, es decir, en todo el intervalo $(-\pi, \pi)$, pero, por supuesto, no en sus extremos, donde la suma de la serie es igual a cero.

Señalemos, además, que al poner en (55.32) $x = \frac{\pi}{2}$, obtendremos la así llamada serie de Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots,$$

con la gue ya hemos chocado antes (véase el p. 37.7, ejemplo 2).

Ejercicios. 5. Hállese la serie de Fourier de la función $f(x) = |x|$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, y con ayuda de esta serie calcúlese la suma de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

6. Hállese la serie de Fourier para las funciones

a) $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$;

b) $f(x) = x^2$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$;

c) $f(x) = x^2$ para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, y al semiintervalo $[-\pi, 0)$ la función f se ha prolongado de manera impar.

Con ayuda de los desarrollos obtenidos calcúlense las sumas de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

55.5*. CONVERGENCIA DE LAS SERIES DE FOURIER PARA FUNCIONES QUE SATISFACEN LA CONDICIÓN DE HÖLDER

En este punto daremos a conocer una condición suficiente más débil, en comparación con la de derivabilidad unilateral (véase el corolario 2 del teorema 4 en el p. 55.4), que también asegura la convergencia de la integral (55.25) y, por lo tanto, la convergencia de la serie de Fourier de la función f hacia el valor (55.26), siendo f 2π-periódica absolutamente integrable en el segmento de longitud igual al período.

Definición 9. *Una función f, definida en el intervalo (x_0, b), lleva el nombre de función que satisface a la derecha la condición de Hölder de exponente α en el punto x_0, siempre que existen el límite finito a la derecha $f(x_0 + 0)$ y unas constantes $M > 0$ y $\delta > 0$ tales que para cualquier h, que satisfaga la condición $0 < h < \delta$, se verifica la desigualdad*

$$|f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)| < Mh^{\alpha}. \tag{55.33}$$

Una función f, definida en el intervalo (a, x_0) se llama función que satisface a la izquierda la condición de Hölder de exponente α en el punto x_0, siempre que existen el límite finito a la izquierda $f(x_0 - 0)$, y unas constantes $M > 0$ y $\delta > 0$ tales que para cualquier h que satisfaga la condición $0 < h < \delta$, se verifica la desigualdad

$$|f(x_0 - h) - f(x_0 - 0)| < Mh^{\alpha}. \tag{55.34}$$

Una función f, que satisface en el punto x_0 la condición de Hölder de cierto exponente tanto a la derecha como a la izquierda, se denomina función que satisface la condición de Hölder de exponente dado en el punto que se considera.

Una función, definida en cierto segmento, se llama función que satisface la condición de Hölder de exponente dado en dicho segmento, si en todo punto de éste satisface la condición de Holder de exponente citado, y además, en todo punto interior del segmento tanto a la derecha como a la izquierda; en el extremo izquierdo del segmento a la derecha, y en el extremo derecho, a la izquierda.

Observemos que la así llamada condición clásica de Hölder de exponente dado consiste en lo siguiente: *de la función f se dice que ella satisface en el punto x la condición clásica de Hölder de exponente $\alpha > 0$, si existen tales $\delta > 0$ y $M > 0$ que para cualesquiera h, $|h| < \delta$, se verifica la desigualdad*

$$|f(x + h) - f(x)| \leqslant M|h|^{\alpha}.$$

Es obvio que en este caso, gracias a la condición $\alpha > 0$, la función f es siempre continua en el punto x: de $\lim_{h \to 0} |h|^{\alpha} = 0$, $\alpha > 0$, se deduce que $\lim_{h \to 0} f(x + h) = f(x)$.

Análogamente se determinan las condiciones clásicas unilaterales de Hölder.

Así pues, la diferencia de la condición de Hölder en consideración de la clásica consiste, particularmente, en que, de conformidad con nuestra definición, una función que satisface la condición de Hölder en un punto puede ser discontinua en el mismo.

La condición de Hölder de exponente uno se llama, comúnmente, *condición de Lipschitz*)*.

Ejercicios. 7. Demuéstrese que si una función satisface en cierto punto la condición de Hölder de exponente α, entonces para $0 < \beta < \alpha$ satisface también en el mismo punto la condición de Hölder de exponente β.

8. Demuéstrese que si una función tiene en cierto segmento una derivada acotada, satisface en el mismo la condición de Lipschitz con una misma constante M.

9. Demuéstrese que si una función satisface en cierto segmento la condición clásica de Hölder de exponente $\alpha > 1$, es en este segmento constante.

10. Demuéstrese que la función $f(x) = x^{\alpha}$, $x \geqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$, satisface en el punto $x = 0$ la condición de Hölder de exponente α, y no satisface en el mismo ninguna condición de Hölder de exponente $\beta > \alpha$.

Teorema 5. *Supongamos que la función f es absolutamente integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$. Si satisface en el punto $x \in (-\pi, \pi)$ la condición de Hölder de exponente α, $\alpha > 0$, entonces su serie de Fourier converge en este punto y su suma es igual a*

$$\frac{f(x + 0) + f(x - 0)}{2};$$

en particular, si la función, además, es continua en el punto $x \in (-\pi, \pi)$, su serie de Fourier converge al valor de la función en el mismo punto:

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x; f) = f(x).$$

*) R. Lipschitz (1832 — 1903), matemático alemán.

Si la función f satisface la condición de Hölder a la derecha en el punto $x = -\pi$, y a la izquierda en el punto $x = \pi$, entonces su serie de Fourier converge en estos puntos y su suma en los mismos es igual a

$$\frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Elijamos δ, $0 < \delta < \pi$, de modo tal que, primero, en el segmento $[0, \delta]$ no haya otros puntos singulares de la función $\frac{f_x^*(t)}{t^\alpha}$, a excepción, quizás, del punto $x = 0$, y, segundo, que para cualesquiera h, $|h| < \delta$, la función f satisfaga las condiciones de Hölder (55.33) y (55.34) en el punto x. Entonces, en vista de la fórmula (55.22), para la función $f_x^*(t)$, tendremos

$$\left|\frac{f_x^*(t)}{t}\right| \leqslant \left|\frac{f(x+t) - f(x+0)}{t}\right| + \left|\frac{f(x-t) - f(x-0)}{t}\right| \leqslant \frac{2M}{t^{1-\alpha}}.$$

Por cuanto la integral $\int_0^\delta \frac{dt}{t^{1-\alpha}}$, $\alpha > 0$, converge, entonces, en virtud del criterio de comparación, converge también en nuestro caso la integral (55.25). Por ello, el teorema 5 proviene del teorema 4. □

Como conclusión observemos que si la función f tiene en el punto x una derivada derecha f'_+, entonces f satisface en este punto a la derecha la condición de Hölder de exponente 1. Efectivamente, del hecho de que el límite finito

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x+0)}{h} = f'_+(x)$$

existe, se deduce que se encontrará tal $\delta > 0$ que para cualesquiera h, $|h| < \delta$, se verificará la desigualdad

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x+0)}{h} - f'_+(x)\right| < 1,$$

de donde, al poner $M \overset{\text{def}}{=} |f'_+(x)| + 1$, obtendremos

$$-M < \frac{f(x+h) - f(x+0)}{h} < M;$$

por consiguiente,

$$|f(x+h) - f(x+0)| \leqslant M|h|, \quad |h| < \delta.$$

La afirmación análoga es lícita también para las derivadas a la izquierda.

Problema 35. Una función f, definida en el segmento $[a, b]$, se llama *función de la clase de Hölder $H^\alpha(M)$* en dicho segmento, si para cualquier par de puntos x y $x + h$ del mismo, $x \in [a, b]$, $x + h \in [a, b]$, se cumple la desigualdad

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant M|h|^\alpha,$$

en otras palabras, si la función f satisface la condición clásica de Hölder de un mismo exponente α y con una misma constante M en todos los puntos del segmento $[a, b]$.

Demuéstrese que si una función 2π-periódica y absolutamente integrable en un segmento de longitud 2π pertenece en cierto segmento $[a, b]$ a la clase de Hölder $H^\alpha(M)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $M > 0$, entonces en todo segmento $[a', b']$, contenido en el intervalo (a, b): $0 < a < a' < b' < b < 2\pi$, la serie de Fourier de la función f converge hacia esta función uniformemente.

55.6. SUMACIÓN DE LAS SERIES DE FOURIER POR EL MÉTODO DE MEDIAS ARITMÉTICAS

Supongamos que la función f es absolutamente integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$ y satisface la condición $f(-\pi) = f(\pi)$, y, por lo tanto, es prolongable de modo 2π-periódico a todo el eje real. Sean $S_n(x)$ sus sumas de Fourier y $D_n(x)$, los núcleos de Dirichlet, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (véanse (55.11) y (55.12)).

Consideraremos las medias aritméticas:

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_n(x)}{n+1},$$

$$\Phi_n(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \ldots + D_n(x)}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{55.35}$$

La suma $\sigma_n(x)$ se llama *suma de Fejer*[*)] de n-ésimo orden de la función f, mientras que $\Phi_n(x)$ es el *núcleo de Fejer* de n-ésimo orden.

De la fórmula

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) f(x+u)\,du$$

(véase (55.17)), obtenemos

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u) f(x+u)\,du. \tag{55.36}$$

Analicemos el comportamiento de las sumas $\sigma_n(x)$ cuando $n \to \infty$, es decir, examinemos la sumación de la serie de Fourier por el *método de medias aritméticas* (véase el p. 35.15).

Estudiaremos ante todo las propiedades del núcleo de Fejer.

Lema 6. *El núcleo de Fejer posee las siguientes propiedades.*

1°. *La función $\Phi_n(x)$ es par, continua y 2π-periódica, con la particularidad de que*

$$\Phi_n(0) = \frac{n+1}{2}; \tag{55.37}$$

2°. *Para todo t el núcleo de Fejer es no negativo*: $\Phi_n(t) \geqslant 0$;

3°. $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \Phi_n(t)\,dt = 1$;

---

*) L. Fejer (1880 — 1959), matemático húngaro.

4°. *Cuando* $t \neq 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$:

$$\Phi_n(t) = \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{n+1}{2} t}{2(n+1)\operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}}.$$

Corolario. *Para todo* δ *fijo,* $0 < \delta < \pi$, *tiene lugar la igualdad*

$$\lim_{n \to \infty} \max_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \Phi_n(t) = 0. \tag{55.38}$$

DEMOSTRACIÓN. Demostremos al principio la propiedad 1°. La paridad, la continuidad y el carácter periódico del núcleo de Fejer provienen inmediatamente, en virtud de la fórmula (55.35), de las mismas propiedades del núcleo de Dirichlet (véase el lema 3 en el p. 55.3). Luego, por cuanto $D_k(0) = k + \frac{1}{2}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, entonces

$$\Phi_n(0) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(0) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left(k + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n+1}{2}\right] = \frac{n+1}{2}.$$

Demostremos la propiedad 3°.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)dt = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(t)dt = 1.$$

Por cuanto el núcleo $\Phi_n(t)$ es par, de aquí se infiere que

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \Phi_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)dt = 1.$$

Demostraremos ahora la propiedad 4°, de la cual se deduce, evidentemente, la propiedad 2°. Para $t \neq 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, tenemos

$$(n+1)\Phi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{sen}\left(k + \frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}\operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{4\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{4\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n} [\cos kt - \cos(k+1)t] =$$

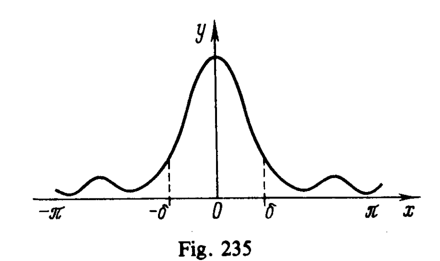


Fig. 235

$$= \frac{1 - \cos(n+1)t}{4\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}} = \frac{\operatorname{sen}^2\frac{n+1}{2}t}{2\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}}. \ \square$$

Observemos que la fórmula (55.37) puede obtenerse, además de la propiedad 4°, pasando al límite y haciendo tender t hacia cero y este procedimiento es factible en vista de que el núcleo de Fejer es continuo.

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Haciendo uso de la propiedad 4° del núcleo de Fejer, obtenemos

$$0 \leqslant \max_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \Phi_n(t) = \frac{1}{2(n+1)} \max_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \frac{\operatorname{sen}^2\frac{n+1}{2}t}{\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}} \leqslant \frac{1}{2(n+1)\operatorname{sen}^2\frac{\delta}{2}}.$$

Por cuanto el segundo miembro de la desigualdad obtenida tiende a cero para $n \to \infty$, de la estimación obtenida se deduce directamente (55.38). $\square$

La forma aproximada de la gráfica del núcleo de Fejer está expuesta en la fig. 235.

En este punto sólo se considerarán aquellas funciones f que son continuas en el segmento $[-\pi, \pi]$ y toman en sus extremos valores iguales: $f(-\pi) = f(\pi)$. Es obvio que toda función de tal índole puede ser prolongada de modo 2π-periódico desde el segmento $[-\pi, \pi]$ a todo el eje numérico $\boldsymbol{R}$. La función que se obtendrá, la designaremos con $\bar{f}$, será continua en todo el eje $\boldsymbol{R}$.

La función de partida f, como cualquiera función continua en un segmento, es acotada, es decir, existe una constante $M > 0$ que $|f(x)| \leqslant M$, $x \in [-\pi, \pi]$. Está claro que en este caso

$$|\bar{f}(x)| \leqslant M, \quad x \in \boldsymbol{R},$$

es decir, la función $\bar{f}$ está acotada en todo el eje $\boldsymbol{R}$.

Además, la función $\bar{f}$ es uniformemente continua en todo el eje $\boldsymbol{R}$. Efectivamente, siendo continua en cualquier segmento finito, por ejemplo, en $[0, 4\pi]$, es en dicho segmento uniformemente continua (véase el teorema 5 en el p. 19.7). Esto significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe tal δ, $0 < \delta < 2\pi$ que para cualesquiera $x_1 \in [0, 4\pi]$, $x_2 \in [0, 4\pi]$, $|x_2 - x_1| < \delta$, se verifica la desigualdad

$$|\bar{f}(x_2) - \bar{f}(x_1)| < \varepsilon.$$

Pero, para x_1' y x_2' arbitrarios de tal género que $|x_2' - x_1'| < \delta$, se encontrarán unos números enteros n y m, para los cuales $x_1 \overset{\text{def}}{=} x_1' - 2\pi n \in [0, 4\pi]$, $x_2 \overset{\text{def}}{=} x_2' - 2\pi m \in [0, 4\pi]$ y $|x_1 - x_2| < \delta$, y, por cuanto $\bar{f}(x_1) = \bar{f}(x_1')$, $\bar{f}(x_2) = \bar{f}(x_2')$ son 2π-periódicas, entonces

$$|\bar{f}(x_2') - \bar{f}(x_1')| = |\bar{f}(x_2) - \bar{f}(x_1)| < \varepsilon.$$

Esto precisamente es indicio de que la función $\bar{f}$ es uniformemente continua en todo el eje numérico $\boldsymbol{R}$.

En lo que sigue, una función prolongada de modo periódico se designará con el mismo símbolo f que la función prolongable.

Teorema 6 (de Fejer). *Si una función es continua en el segmento $[-\pi, \pi]$ y toma en sus extremos valores iguales, la sucesión de sus sumas de Fejer converge uniformemente en este segmento hacia la misma función.*

Corolario. *Si la serie de Fourier de una función, que es continua en el segmento $[-\pi, \pi]$ y toma en sus extremos valores iguales, converge en cierto punto, converge hacia el valor de la función en dicho punto.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la función f es continua en el segmento $[-\pi, \pi]$ y $f(-\pi) = f(\pi)$. Prolonguémosla de modo 2π-periódico a todo el eje numérico $\boldsymbol{R}$. Estimemos la diferencia $f(x) - \sigma_n(x)$ entre la función f y su suma de Fejer σ_n, empleando con este fin la representación de la suma de Fejer en la forma (55.36) y las propiedades del núcleo de Fejer demostradas en el lema 6 y en su corolario. Elijamos arbitrariamente $\varepsilon > 0$. Tenemos

$$|f(x) - \sigma_n(x)| = \left|\frac{f(x)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)f(x+t)dt\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)[f(x) - f(x+t)]dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)|f(x) - f(x+t)|\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} + \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}, \qquad (55.39)$$

donde $\delta > 0$ se ha elegido de una manera tal que el valor del módulo de continuidad $\omega(\delta; f)$ de la función f satisface la desigualdad

$$\omega(\delta; f) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Esto es bien posible; puesto que la función f es uniformemente continua en todo el eje numérico $\boldsymbol{R}$. Por eso, para todo $x \in \boldsymbol{R}$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)|f(x) - f(x+t)|\,dt \leqslant \frac{\omega(\delta; f)}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)dt \leqslant \frac{\varepsilon}{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt = \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (55.40)$$

Las dos integrales restantes se estiman de un modo igual: la función f está acotada en toda la recta numérica, es decir, existe tal constante $M > 0$ que para cualesquiera $x \in \boldsymbol{R}$ tiene lugar la desigualdad

$$|f(x)| \leqslant M.$$

Por consiguiente, para todo $x \in \boldsymbol{R}$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)|f(x) - f(x+t)|\,dt \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)[|f(x)| + |f(x+t)|]dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2M}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)dt \leqslant \frac{2M}{\pi}\max_{\delta \leqslant t \leqslant \pi}\Phi_n(t)\int_{\delta}^{\pi}dt =$$

$$= \frac{2M(\pi - \delta)}{\pi}\max_{\delta \leqslant t \leqslant \pi}\Phi_n(t) < 2M\max_{\delta \leqslant t \leqslant \pi}\Phi_n(t).$$

De acuerdo con el corolario del lema 6, el segundo miembro de la desigualdad obtenida tiende hacia cero cuando $n \to \infty$, por lo cual existe tal n_0 que para cualesquiera $n \geqslant n_0$ se cumple la desigualdad

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)|f(x) - f(x+t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (55.41)$$

Por analogía, para todo $x \in \boldsymbol{R}$ y cualesquiera $n \geqslant n_0$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}\Phi_n(t)|f(x) - f(x+t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (55.42)$$

De (55.39), (55.40), (55.41) y (55.42) tenemos para $x \in \boldsymbol{R}$ arbitrario y todos los $n \geqslant n_0$:

$$|f(x) - \sigma_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

es decir, la sucesión $\{\sigma_n\}$ converge uniformemente en todo el eje numérico $\boldsymbol{R}$ hacia la función f. □

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Cualquier serie convergente se suma por el método de medias aritméticas a su suma (véase el p. 35.15). Por ello, si la serie de Fourier de una función, que es continua en el segmento $[-\pi, \pi]$ y toma en sus extremos los valores iguales, converge en cierto punto hacia algún número A, entonces el límite de la sucesión de medias aritméticas de las sumas parciales, es decir, de las sumas de Fejer es también igual a A: si $\lim_{n\to\infty} S_n(x_0; f) = A$, se tiene $\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x_0) = A$.

Pero, según el lema demostrado, $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x_0) = f(x_0)$, por consiguiente, también $\lim_{n\to\infty} S_n(x_0; f) = f(x_0)$. □

Subrayemos que la serie de Fourier de una función, que es continua en el segmento $[-\pi, \pi]$ y toma en sus extremos los valores iguales, puede divergir en algunos puntos. No obstante, de acuerdo con lo demostrado, si la serie converge en cierto punto, converge necesariamente hacia el valor de la misma función en dicho punto.

Observemos en conclusión que para una función, que es continua en un segmento y toma en sus extremos valores iguales, la serie de Fourier, sea convergente o divergente en los puntos aislados, permite restablecer unívocamente la función indicada: resulta suficiente formar, sirviéndose de sus sumas parciales, las sumas de Fejer; la sucesión de las últimas ya converge y, además, uniformemente hacia la propia función. De este modo, incluso el estudio de la serie divergente puede resultar útil.

55.7. APROXIMACIÓN DE LAS FUNCIONES CONTINUAS POR MEDIO DE LOS POLINOMIOS

Definición 10. *Las funciones de la forma*

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \operatorname{sen} kx A_n^2 + B_n^2 > 0$$

se llaman polinomios trigonométricos de n-ésimo orden, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *).

Teorema 7 (de Weierstrass). *Si la función f es continua en el segmento* $[-\pi, \pi]$ *y* $f(-\pi) = f(\pi)$, *entonces para todo número* $\varepsilon > 0$ *existe un polinomio trigonométrico* $T(x)$ *tal que*

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

En efecto, en virtud del teorema 6 (véase el p. 55.6), a título de tal polinomio trigonométrico puede tomarse, por ejemplo, la suma correspondiente de Fejer $\sigma_n(x)$, que es, evidentemente, un polinomio trigonométrico de orden no superior a n.

Teorema 8 (de Weierstrass). *Si la función f es continua en el segmento* $[a, b]$, *para todo* $\varepsilon > 0$ *existe tal polinomio algebraico* $P(x)$ *que*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

DEMOSTRACIÓN. Apliquemos linealmente el segmento $[0, \pi]$ sobre otro segmento $[a, b]$:

$$x = a + \frac{b-a}{\pi} t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

y sea $f^*(t) = f\left(a + \frac{b-a}{\pi} t\right)$. La función f^* está definida por esta fórmula en $[0, \pi]$. Prolongámosla de modo impar al segmento $[-\pi, 0]$, es decir, pongamos

$$f^*(t) = f^*(-t), \quad \text{si} \quad t \in [-\pi, 0].$$

*) Aquí se considera que $B_0 = 0$.

La función f^*, obtenida de esta manera, es continua en $[-\pi, \pi]$ (¿por qué?) y $f^*(-\pi) = f^*(\pi)$. Por eso, de acuerdo con el teorema 7, para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico $T(t)$ tal que

$$|f^*(t) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como se sabe, $\cos kt$ y $\operatorname{sen} kt$, $k = 1, 2, \ldots$, y, por lo tanto, también el polinomio trigonométrico $T(t)$ son funciones analíticas, a consecuencia de lo cual se desarrollan en las series de potencias que convergen en toda la recta real y, por consiguiente, convergen uniformemente en todo segmento finito (véase el § 37):

$$T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k.$$

Si $P_n(t)$ son sumas parciales de esta serie, debido a su convergencia uniforme en el segmento $[-\pi, \pi]$, existe tal número n_ε que para $n \geqslant n_\varepsilon$ se tiene

$$|T(t) - P_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi.$$

Al tomar, para concretar, $n = n_\varepsilon$ y suponer $P(t) = P_{n_\varepsilon}(t)$, tenemos

$$|f^*(t) - P(t)| \leqslant |f^*(t) - T(t)| + |T(t) - P(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Volviendo a la variable x, es decir, suponiendo $t = \pi \frac{x-a}{b-a}$ obtendremos

$$\left| f(x) - P\left(\pi \frac{x-a}{b-a}\right) \right| < \varepsilon, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

donde $P\left(\pi \frac{x-a}{b-a}\right)$ es, evidentemente, un polinomio. □

OBSERVACIÓN. Supongamos que la función f es continua en el segmento $[a, b]$. Elijamos una sucesión de los números $\varepsilon_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, que tiende hacia cero $\left(\text{por ejemplo, } \varepsilon_n = \frac{1}{n}\right)$; entonces, de acuerdo con el teorema 8, para todo $n = 1, 2, \ldots$ existe un polinomio $P_n(x)$ (aquí n es número de orden y no el grado del polinomio), tal que

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon_n, \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{55.43}$$

Es evidente que para $n \to \infty$ se tiene $P_n(x) \rightrightarrows f(x)$ en el segmento $[a, b]$.

Así pues, toda función continua en un segmento sirve de límite para la sucesión de polinomios uniformemente convergente en dicho segmento. Anteriormente (véase el teorema 8′ en el p. 36.4) ya se ha demostrado la afirmación recíproca, es decir, toda función que sirve de límite para una sucesión de polinomios uniformemente convergente en cierto segmento (y más aún, para una sucesión de cualesquiera funciones continuas) es continua en dicho segmento.

De este modo, el teorema de Weierstrass establece la propiedad característica de las funciones continuas, y sólo continuas.

Resulta curioso notar que el concepto original de continuidad de una función fue introducido en la forma general abstracta; este concepto de ningún modo estaba ligado con las clases concretas de funciones elementales, en particular, con los polinomios y, consecuentemente, con ningunas representaciones analíticas de las funciones en términos de los polinomios.

El teorema de Weierstrass muestra que la clase de funciones continuas introducida de este modo no está lejos, en cierto sentido, de la clase de polinomios. A saber, cualquiera que sea la función f, continua en un segmento, y por pequeño que sea el número $\varepsilon > 0$, prefijado de antemano, siempre existe un polinomio que en todo el segmento se diferencia de la función f a lo sumo en ε, es decir, un polinomio que aproxima la función con cualquier grado de exactitud dado de antemano. No es difícil obtener también la representación analítica en forma de una serie de polinomios para la función continua en un segmento. De (55.43) tenemos

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} P_n(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{55.44}$$

o bien

$$f(x) = P_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n+1}(x) - P_n(x)] \tag{55.45}$$

($P_n(x)$ son los polinomios), con la particularidad de que en el segmento $[a, b]$ los polinomios $P_n(x)$ en (55.44) tienden a su límite uniformemente y también uniformemente converge la serie (55.45) en dicho segmento. En este caso, tanto la existencia del límite (55.44), como la del desarrollo (55.45) constituyen una condición necesaria y suficiente de la continuidad de la función f en el segmento citado. Esto justifica la idea intuitiva sobre una función como expresión analítica compuesta de una variable independiente y unas constantes por medio de las operaciones algebraicas y analíticas.

Observaciones análogas pueden hacerse también sobre el primer teorema de Weierstrass (teorema 7).

55.8. COMPLETITUD DEL SISTEMA TRIGONOMÉTRICO Y DEL SISTEMA DE POTENCIAS ENTERAS NO NEGATIVAS DE X EN UN ESPACIO DE FUNCIONES CONTINUAS

En este punto se parafrasearán los teoremas demostrados anteriormente y se deducirán de éstos algunos corolarios sencillos.

Definición 11. *Sea X un conjunto de las funciones definidas en el segmento $[a, b]$. Un sistema de funciones*

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots \tag{55.46}$$

se llama completo para el conjunto X en el sentido de aproximación uniforme, si, cualquiera que sea la función $f \in X$, para todo $\varepsilon > 0$ existe tal número finito de funciones $\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \ldots, \varphi_{n_k}$, pertenecientes al sistema (55.46), y tales números $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ que

$$|f(x) - [\lambda_1\varphi_{n_1}(x) + \lambda_2\varphi_{n_2}(x) + \ldots + \lambda_k\varphi_{n_k}(x)]| < \varepsilon$$

para cualesquiera $x \in [a, b]$.

En otras palabras, el sistema de funciones (55.46) forma un sistema completo para el conjunto X, si toda función de X puede ser aproximada con la exactitud requerida mediante las combinaciones lineales de funciones del sistema (55.46).

Haciendo uso del concepto de completitud de un sistema, los teoremas 7 y 8 del párrafo precedente pueden parafrasearse del modo siguiente.

Teorema 7'. *El sistema de funciones trigonométricas* (55.2) *es completo, en el sentido de aproximación uniforme, para el conjunto de funciones que son continuas en el segmento $[-\pi, \pi]$ y toman en sus extremos valores iguales.*

Teorema 8'. *Un sistema de las potencias enteras no negativas de x, es decir, el sistema*

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots \tag{55.47}$$

es completo, en el sentido de aproximación uniforme, para el conjunto de todas las funciones que son continuas en cualquier segmento dado.

Definición 12. *Supongamos que las funciones f y g vienen definidas en el segmento $[a, b]$. El número*

$$\sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx}$$

se denomina desviación estándar en el segmento $[a, b]$ de la función f de la g. *)

Definición 13. *El sistema de funciones* (55.46) *se llama completo, en el sentido de la aproximación media cuadrática, para cierto conjunto X de funciones definidas en el segmento $[a, b]$, si, cualquiera que sea la función $f \in X$, para todo $\varepsilon > 0$ existe tal combinación lineal finita de funciones del sistema* (55.46) *que su desviación estándar en el segmento $[a, b]$ de la función f es inferior a ε.*

Teorema 9. *El sistema de funciones trigonométricas* (55.2) *es completo en el sentido de la aproximación media cuadrática en un conjunto de las funciones que son continuas en el segmento $[-\pi, \pi]$ y toman en los puntos π y $-\pi$ un mismo valor.*

DEMOSTRACIÓN. Sea f una función continua en el segmento $[-\pi, \pi]$, con la particularidad de que $f(\pi) = f(-\pi)$. De conformidad con el teorema 7', para todo $\varepsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico $T(x)$ tal que

$$|f(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

De aquí para la desviación estándar de este polinomio de la función f tenemos

$$\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2 dx} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} dx} = \varepsilon. \ \square$$

En lo que sigue veremos (véase el p. 58.6) que la acotación $f(\pi) = f(-\pi)$, utilizada por nosotros en la demostración del teorema 9 (sólo en este caso se podría referir al teorema 7'), no es esencial. A saber, el sistema trigonométrico (55.2) es completo en el sentido de la media cuadrática en todo el conjunto de funciones con-

*) Podemos decir también "desviación de la función g de la f", por cuanto la expresión en consideración no cambia su valor, si f y g cambian de lugar.

tinuas en el segmento $[-\pi, \pi]$, y, más aún, se puede mostrar que es completo también en el sentido de la media cuadrática en el conjunto de todas las funciones de cuadrado integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$.

Observemos que el sistema trigonométrico (55.2) es incompleto a ciencia cierta en el conjunto de todas las funciones continuas en el segmento $[-\pi, \pi]$ en el sentido de la aproximación uniforme, es decir, en el sentido de la definición 11. En efecto, si f es una función tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico T_ε de tal índole que

$$|f(x) - T_\varepsilon(x)| < \varepsilon, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi,$$

entonces de la condición $T_\varepsilon(\pi) = T_\varepsilon(-\pi)$ para $\varepsilon \to 0$ proviene que $f(\pi) = f(-\pi)$.

En la aproximación de las funciones en el sentido de la media cuadrática mediante los polinomios trigonométricos desempeñan un papel especial las sumas parciales de la serie de Fourier de la función que se aproxima. En el punto que sigue se mostrará que la suma parcial de n-ésimo orden tiene desviación estándar mínima de la función dada en comparación con cualquier polinomio trigonométrico de grado n.

En fin, se puede mostrar que si la función f posee el cuadrado integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$, entonces la desviación, que experimentan sus sumas parciales de Fourier $S_n(x)$ tiende a cero cuando $n \to \infty$, o, como suele decirse, la función f de cuadrado integrable es un límite, en el sentido de la media cuadrática, de sus sumas parciales de Fourier (véase el p. 58.6). Todas estas circunstancias atestiguan en favor del estudio de la aproximación de funciones en el sentido de la desviación estándar.

Por analogía con el teorema 9 se demuestra el teorema siguiente.

Teorema 10. *El sistema de potencias enteras y no negativas de x, es decir, el sistema (55.47) es completo en el sentido de la aproximación media cuadrática en un conjunto de funciones continuas sobre cualquier segmento dado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea f una función continua en cierto segmento $[a, b]$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, de acuerdo con el teorema 8′, existe tal polinomio P que

$$|f(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}}, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

de donde

$$\sqrt{\int_a^b [f(x) - P(x)]^2 dx} < \varepsilon. \ \square$$

55.9. PROPIEDAD MINIMAL DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER. DESIGUALDAD DE BESSEL E IGUALDAD DE PARSEVAL

En este punto examinaremos las series de Fourier para unas funciones integrables cuyo cuadrado es también integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$ (la integrabilidad aquí se entiende, por regla general, en el sentido impropio). Es importante indicar que si la función f es de tal género que tiene un número finito de puntos singulares (véase el p. 55.1) en el segmento $[-\pi, \pi]$, es integrable según Riemann en cual quier segmento que no contiene ningún punto singular y el cuadrado de ésta f^2 es integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$, entonces de la desigualdad

$$|f| \leqslant \frac{1 + |f|^2}{2}$$

se infiere que la función f es integrable en el segmento citado. Lo recíproco, en el caso general, no es cierto. Existen funciones positivas $\left(\text{por ejemplo, la función } \frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)$, integrables en el segmento $[-\pi, \pi]$ cuyo cuadrado, no obstante, ya no es integrable en el mismo.

De este modo, el conjunto citado de funciones de cuadrado integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$ constituye un subconjunto propio del conjunto de todas las funciones absolutamente integrables en el segmento $[-\pi, \pi]$.

Observemos que análogamente se introduce también el concepto de función de cuadrado integrable para cualquier intervalo finito.

Teorema 11. *Sea f una función de cuadrado integrable en el segmento* $[-\pi, \pi]$. *Entonces, si* $S_n(x)$ *es su suma de Fourier de n-ésimo orden, se tiene*

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \min_{T_n(x)} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx, \tag{55.48}$$

donde el mínimo en el segundo miembro de la igualdad se toma según todos los polinomios trigonométricos T_n *de orden no superior a n.*

Si $a_0, a_n, b_n, n = 1, 2, \ldots$, *son coeficientes de Fourier de la función f, se verifica la desigualdad*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx, \tag{55.49}$$

que lleva el nombre de Bessel).*

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \operatorname{sen} kx,$$

en este caso, abriendo los corchetes en la expresión

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx \tag{55.50}$$

y haciendo uso del lema 1 del p. 55.1 (en particular, la ortogonalidad del sistema trigonométrico), obtenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \pi\left(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k^2 + B_k^2\right) -$$

*) F. Bessel (1784 — 1846), matemático y astrónomo alemán.

$$- 2\left[\frac{A_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \sum_{k=1}^{n} A_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx + \right.$$

$$\left. + B_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx\right] = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \pi\left(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k^2 + B_k^2\right) -$$

$$- 2\pi\left[\frac{a_0A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_kA_k - b_kB_k\right] = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx +$$

$$+ \pi\left[\frac{(A_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k - a_k)^2 + (B_k - b_k)^2\right] -$$

$$- \pi\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right]. \quad (55.51)$$

De la expresión obtenida se ve que la magnitud (55.50) adquiere el valor mínimo cuando $A_0 = a_0, A_k = a_k, B_k = b_k, k = 1, 2, \ldots$, es decir, cuando $T_n(x)$ es la suma de Fourier $S_n(x)$ de orden n de la función f. La primera afirmación del teorema queda demostrada.

Si $T_n(x)$ es la suma de Fourier de orden n, de (55.51) se desprende que

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right], \quad (55.52)$$

de donde

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right] \geqslant 0.$$

Esta desigualdad es lícita para cualquier n natural. Pasando en la misma al límite para $n \to \infty$, obtendremos una desigualdad

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2\right] \geqslant 0,$$

la que, obviamente, es equivalente a la desigualdad (55.49). □

De la desigualdad de Bessel se deduce que para una función de cuadrado integrable la serie

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

converge. El término general de la serie convergente tiende a cero, por lo cual en el caso dado $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

De este modo hemos establecido nuevamente que los coeficientes de Fourier tienden a cero (véase el p. 55.2), pero esta vez para una clase de funciones más estrecha (como lo indicamos al principio de este punto) que antes, a saber, para la clase de funciones de cuadrado integrable.

En el punto 58.6 se mostrará que en realidad la fórmula (55.49) queda lícita con *el signo de igualdad*. Por ahora demostraremos este hecho sólo para el caso en que la función f es continua y 2π-periódica.

Teorema 12. *Supongamos que la función f es continua en el segmento $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ y $a_0, a_n, b_n, n = 1, 2, \ldots$, son sus coeficientes de Fourier. En este caso se verifica la igualdad*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2,$$

*llamada igualdad de Parseval**).

DEMOSTRACIÓN. Debido a la completitud en el sentido de aproximación media cuadrática del sistema de funciones trigonométricas (55.2) en la clase de funciones continuas que toman valores iguales en los extremos del segmento $[-\pi, \pi]$, siendo todo $\varepsilon > 0$, existe para la función f un polinomio trigonométrico $T(x)$ de cierto orden k tal que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2dx < \varepsilon. \quad (55.53)$$

Con arreglo al teorema 11 (véase (55.48)), para la suma de Fourier $S_k(x)$ del mismo orden k se cumple la desigualdad

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_k(x)]^2dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2dx.$$

De aquí y de las fórmulas (55.52) y (55.53) obtenemos:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n^2 + b_n^2\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_k(x)]^2dx \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2 < \varepsilon.$$

*) M. Parseval (1755 — 1836), matemático francés.

Por cuanto esta desigualdad es válida para cualquier $\varepsilon > 0$, su primer miembro es igual a cero. □

Corolario. *Cumplidas las suposiciones del teorema, tenemos*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = 0.$$

En efecto, en virtud del teorema 12, para $n \to \infty$ el segundo miembro de la igualdad (55.52) tiende a cero. □

55.10. CARÁCTER DE CONVERGENCIA DE LAS SERIES DE FOURIER. DERIVACIÓN DE LAS SERIES DE FOURIER TÉRMINO A TÉRMINO

Analicemos la relación que existe entre las series de Fourier de una función y la derivada de ésta.

Teorema 13. *Sea f una función continua en el segmento* $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ *y supongamos que*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx.$$

Si la función f es continuamente derivable a trozos en el segmento $[-\pi, \pi]$ *(véase la definición* 1 *en el p.* 30.2), *entonces*

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} -na_n \operatorname{sen} nx + nb_n \cos nx,$$

es decir, la serie de Fourier de la derivada se obtiene de la serie de Fourier de la misma función por derivación formal término a término *).

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$f'(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \operatorname{sen} nx.$$

Teniendo presente que $f(\pi) = f(-\pi)$ e integrando por partes, obtenemos

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)dt = \frac{1}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] = 0,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos nt\, dt = \frac{1}{\pi} f(t) \cos nt \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt\, dt = nb_n,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \operatorname{sen} nt\, dt = f(t) \operatorname{sen} nt \Big|_{-\pi}^{\pi} -$$

*) Sin suposiciones algunas acerca de la convergencia de la serie de Fourier de la derivada.

$$-\frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt = -na_n, \quad n = 1, 2, \ldots . \ \square$$

Pasemos al estudio de la velocidad de convergencia de la serie de Fourier en dependencia de la suavidad de las funciones. Previamente demostremos el lema.

Lema 7. *Supongamos que la función f tiene en un segmento derivadas continuas de orden hasta* $k - 1$ *inclusive y una derivada continua a trozos de orden* $k\,(k \geqslant 1)$*), *con la particularidad de que*

$$f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi), \quad j = 0, 1, \ldots, k - 1,$$

y sea

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx.$$

En este caso

$$|a_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^k}, \quad |b_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^k}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

donde $\varepsilon_n > 0$ *y la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2$ *converge.*

DEMOSTRACIÓN. Al aplicar sucesivamente el teorema 13 k veces, obtendremos

$$f^{(k)}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \operatorname{sen} nx,$$

donde o bien

$$\alpha_n = \pm n^k a_n, \quad \beta_n = \pm n^k b_n, \tag{55.54}$$

o bien

$$\alpha_n = \pm n^k b_n, \quad \beta_n = \pm n^k a_n, \tag{55.55}$$

con la particularidad de que, según la desigualdad de Bessel,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 + \beta_n^2 \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f^{(k)}(x)]^2 dx. \tag{55.56}$$

Pongamos $\varepsilon_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$. En virtud de la desigualdad (55.56), la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2$ converge.

*) Decimos que cierta función tiene derivada continua a trozos en el segmento dado, si dicha función es continuamente derivable a trozos en el mismo (véase la definición 1 en el p. 30.2). De este modo, si la función tiene derivada continua a trozos en un segmento, puede suceder que en un número finito de puntos del mismo segmento ella no tenga en absoluto derivada. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ en el segmento $[-1, 1]$ tiene derivada continua a trozos, mientras que en el punto $x = 0$ no la tiene.

Si es lícita (55.54), se tiene

$$|a_n| = \frac{|\alpha_n|}{n^k} \leqslant \frac{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}}{n^k} = \frac{\varepsilon_n}{n^k}.$$

Análogamente,

$$|b_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^k}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

De manera semejante esta estimación se obtiene para el caso (55.55). □

Teorema 14. *Supongamos que la función f tiene en el segmento* $[-\pi, \pi]$ *derivadas continuas hasta el orden* $k - 1$ *inclusivo y una derivada continua a trozos de orden* $k (k \geqslant 1)$, *con la particularidad de que* $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$, $j = 0, 1, \ldots, k - 1$. *Entonces, la serie de Fourier de la función f converge uniforme y absolutamente en todo el segmento* $[-\pi, \pi]$ *a la propia función f y*

$$|f(x) - S_n(x; f)| \leqslant \frac{\eta_n}{n^{k - 1/2}},$$

donde $\lim\limits_{n \to \infty} \eta_n = 0$ ($\{\eta_n\}$ *es una sucesión numérica*), *y* $S_n(x; f)$ *es la suma de Fourier de n-ésimo orden de la función f.*

De este modo podemos decir que en el segmento $[-\pi, \pi]$ se cumple uniformemente la estimación

$$f(x) - S_n(x; f) = o\left(n^{-k + \frac{1}{2}}\right), \quad n \to \infty.$$

Observemos preliminarmente que si $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ son las sucesiones de números no negativos de tal índole que

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 < +\infty \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 < +\infty,$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2}. \tag{55.57}$$

En efecto, esta igualdad se obtiene inmediatamente, pasando al límite, de la desigualdad de Cauchy — Schwartz $\sum\limits_{n=1}^{N} u_n v_n \leqslant \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{N} u_n^2} \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{N} v_n^2}$ cuando $N \to \infty$ (véase el p. 18.1 y 35.8*) (indiquemos que la desigualdad (55.57) es un caso particular de la desigualdad (35.33) del p. 35.8* para $p = q = 2$).

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 14. Sea

$$f(x) \sim \frac{a}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \operatorname{sen} mx, \tag{55.58}$$

$$S_n(x; f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} a_m \cos mx + b_m \operatorname{sen} mx.$$

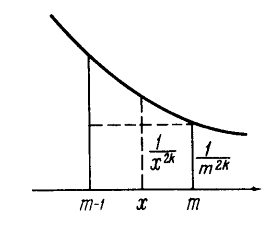


Fig. 236

Según el lema,

$$|a_m| \leqslant \frac{\varepsilon_m}{m^k}, \quad |b_m| \leqslant \frac{\varepsilon_m}{m^k}, \tag{55.59}$$

donde ε_m son de tal género que la serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^2 \tag{55.60}$$

converge.

Aplicando las desigualdades (55.57) y (55.59), estimemos el resto $r_n(x)$ de la serie (55.58):

$$|r_n(x)| = \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \operatorname{sen} mx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=n+1}^{\infty} |a_m| + |b_m| \leqslant 2 \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{m^k} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2} \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{2}{m^{2k}}}. \tag{55.61}$$

Pongamos

$$\varkappa_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2.$$

Ya que la serie (55.60) es convergente, tenemos

$$\lim_{n \to \infty} \varkappa_n = 0. \tag{55.62}$$

Luego, indiquemos que en el segmento $[m - 1, m]$ se verifica la desigualdad $\frac{1}{m^{2k}} \leqslant \frac{1}{x^{2k}}$ (fig. 236) y, por consiguiente, $\frac{1}{m^{2k}} \leqslant \int\limits_{m-1}^{m} \frac{dx}{x^{2k}}$. Por esto

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{2k}} \leqslant \sum_{m=m+1}^{\infty} \int_{m-1}^{m} \frac{dx}{x^{2k}} \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2k}} = \frac{1}{(2k - 1)n^{2k - 1}}.$$

De este modo, de (55.61) se desprende la estimación

$$|r_n(x)| \leqslant 2\sqrt{\frac{x_n}{2k-1}}\,\frac{1}{\sqrt{n^{2k-1}}}. \tag{55.63}$$

Pongamos, por fin, $\eta_n = \dfrac{2}{\sqrt{2k-1}}\sqrt{x_n}$; en virtud de (55.62) $\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n = 0$. Por ello, de la igualdad (55.63) obtenemos

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{\eta_n}{n^{k-\frac{1}{2}}} = o\left(\frac{1}{n^{k-\frac{1}{2}}}\right), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

y aquí el infinitésimo η_n no depende del punto x.

De conformidad con el corolario 4 del teorema 4 (el p. 55.4), la serie (55.58) converge hacia la función $f(x)$, por consiguiente, $r_n(x) = f(x) - S_n(x, f)$ y, de este modo la convergencia uniforme de la serie de Fourier con la estimación mencionada queda demostrada.

Su convergencia absoluta también se demuestra, puesto que hemos obtenido la estimación (véase (55.61))

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} |a_m| + |b_m| \leqslant \frac{\eta_n}{n^{k-\frac{1}{2}}},$$

de la que se deduce que la serie de Fourier de la función f no sólo es absolutamente convergente, sino que una serie formada de las magnitudes absolutas de sus términos y, más aún, una serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m| + |b_m|$$

converge con la misma "velocidad" $\dfrac{\eta_n}{n^{k-\frac{1}{2}}}$. □

El teorema 14 enseña que cuanto más suave es la función f (es decir, cuanto mayor es el número de derivadas que tiene f), tanto mayor es la velocidad de convergencia hacia ella de la serie de Fourier. En este caso la desigualdad (53.63) hace posible estimar el error que se obtiene al sustituir la serie de Fourier por su n-ésima suma parcial.

De este teorema proviene, en particular, para $k = 1$, que la serie de Fourier de toda función periódica de período 2π, continua y continuamente derivable a trozos (véase el p. 30.2), converge uniformemente sobre todo el período hacia la misma función.

Ejercicios. 11. ¿Será uniformemente convergente la serie de Fourier de la función $f(x) = |x|$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$? ¿Convergirá uniformemente una serie obtenida por derivación término a término de la serie de Fourier de esta función?

12. Muéstrese que la serie de Fourier de una función continua periódica lineal a trozos (la definición de la función lineal a trozos véase en el ejercicio 6 del p. 19.7) converge hacia esta función uniformemente.

13. Sirviéndose del resultado del ejercicio antecedente y del resultado del ejercicio 6, p. 19.7, demuéstrese el teorema 7 del p. 55.7 sobre la aproximación uniforme de funciones periódicas continuas mediante los polinomios trigonométricos.

55.11. INTEGRACIÓN DE LAS SERIES DE FOURIER TÉRMINO A TÉRMINO

En este punto se probará que las series de Fourier pueden integrarse término a término.

Teorema 15. *Sea f una función continua en el segmento $[-\pi, \pi]$ y supongamos que*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx \tag{55.64}$$

es su serie de Fourier. Tenemos en este caso

$$\int_0^t f(x)dx = \int_0^t \frac{a_0 dx}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)dx =$$

$$= \frac{a_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}\operatorname{sen} nt + \frac{b_n}{n}(1 - \cos nt), \tag{55.65}$$

y la serie que figura a la derecha converge uniformemente.

Diremos que la afirmación sobre la convergencia (incluso de la convergencia uniforme) de la serie (55.65) tiene lugar sin suposiciones algunas sobre la convergencia de la serie de partida (55.64).

DEMOSTRACIÓN. Examinemos una función

$$F(t) = \int_0^t \left[f(x) - \frac{a_0}{2}\right] dx. \tag{55.66}$$

Esta función es continua en el segmento $[-\pi, \pi]$ y tiene en éste una derivada continua $F'(t) = f(t) - \dfrac{a_0}{2}$ y

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - \pi a_0 = 0.$$

Por eso, en virtud del teorema 14, su serie de Fourier converge hacia ella y, además, uniformemente. Designemos sus coeficientes de Fourier mediante A_0, A_n, B_n, $n = 1, 2, \ldots$. Entonces, en vista de lo dicho

$$F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nt + B_n \operatorname{sen} nt. \tag{55.67}$$

Hallemos los coeficientes de esta serie. Integrando por partes, obtendremos

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi} F(t)\frac{\operatorname{sen} nt}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} -$$

$$- \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]\operatorname{sen} nt\,dt = -\frac{b_n}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Por analogía,

$$B_n = \frac{a_n}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Para hallar A_0, pongamos en (55.67) $t = 0$. Al notar que $F(0) = 0$, obtendremos

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n = 0, \quad \text{de donde} \quad \frac{A_0}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}.$$

Así pues,

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\operatorname{sen} nt + \frac{b_n}{n}(1 - \cos nt).$$

De aquí y también de (55.66) proviene precisamente la fórmula (55.65) y la convergencia uniforme de la serie (55.65) es el resultado de la convergencia uniforme de la serie (55.67). □

Problema 36. Demuéstrese que la serie trigonométrica convergente $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{\ln n}$ no es una serie de Fourier de ninguna función absolutamente integrable.

Indiquemos que si $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$ y, por ende, $a_0 = 0$, entonces como resultado de la integración término a término de la serie de Fourier de la función f se obtiene de nuevo una serie de Fourier de cierta función F, a saber, como se deduce de lo demostrado,

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Dado que para cualquier función primitiva Φ de la función f, continua en el segmento $[-\pi, \pi]$, es válida la fórmula de Newton — Leibniz

$$\Phi(\pi) - \Phi(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

la condición $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$ será equivalente a que todas las funciones primitivas de f toman en los extremos del segmento $[-\pi, \pi]$ valores iguales.

55.12 SERIES DE FOURIER PARA EL CASO DE UN INTERVALO ARBITRARIO. NOTACIÓN COMPLEJA DE LAS SERIES DE FOURIER

La teoría de las series trigonométricas de Fourier de las funciones 2π-periódicas se extiende fácilmente al caso de funciones periódicas de cualquier periodo $2l$. Para ello resulta suficiente aplicar el segmento $[-l, l]$ sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ mediante la aplicación lineal:

$$y = \frac{\pi}{l}x, \quad -l \leqslant x \leqslant l, \quad -\pi \leqslant y \leqslant \pi,$$

y el problema se reducirá al caso ya considerado. Se denomina serie de Fourier de la función f de período $2l$ respecto de la variable de partida x una serie de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l},$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)dt, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{l}\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

En particular, si la función f es par, se tiene

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$

donde

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots ,$$

y si f es impar, entonces

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l},$$

donde

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{l}\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Como conclusión, indiquemos, además, la así llamada *notación compleja* de las series de Fourier que es de uso frecuente en las matemáticas y sus aplicaciones. Sea

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \,\mathrm{sen}\, nx. \tag{55.68}$$

Como se sabe (véase el p. 37.6),

$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{nxi} + e^{-nxi}), \tag{55.69}$$

$$\mathrm{sen}\, nx = \frac{1}{2i}(e^{nxi} - e^{-nxi}) = \frac{i}{2}(e^{-nxi} - e^{nxi}). \tag{55.70}$$

Al sustituir (55.69) y (55.70) en (55.68), obtendremos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - b_n i)e^{nxi} + \frac{1}{2}(a_n + b_n i)e^{-nxi}.$$

Suponiendo

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n i), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + b_n i),$$

tenemos

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{55.71}$$

donde, evidentemente, $c_{-n} = \bar{c}_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Al recordar que $\cos\alpha \pm i\,\mathrm{sen}\,\alpha = e^{\pm i\alpha}$ (véase el p. 37.6), tendremos

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n i) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\,\mathrm{sen}\, nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx,^{*)}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + b_n i) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

o bien, al reunir ambas fórmulas y añadir el caso de $n = 0$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{55.72}$$

*) Véase en el p. 54.6 la definición de la integral de una función de valores complejos.

Al sustituir (55.72) en (55.71), obtendremos

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inx}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt. \tag{55.73}$$

Así pues, hemos escrito la serie de Fourier en la forma compleja y se han obtenido las expresiones para sus coeficientes.

Sólo nos resta aclarar el concepto de convergencia de la serie de forma (55.73).

Se denomina suma parcial de n-ésimo orden de la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n \tag{55.74}$$

la suma $S_n = \sum_{k=-n}^{n} z_k$. La serie (55.74) se llama convergente, si existe $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, en este caso S se denomina suma de la serie y se escribe

$$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n.$$

§ 56. INTEGRAL DE FOURIER Y TRANSFORMACIÓN DE FOURIER

56.1. REPRESENTACIÓN DE UNA FUNCIÓN EN FORMA DE LA INTEGRAL DE FOURIER

Supongamos que la función f es absolutamente integrable en todo el eje real. Escribamos para ella una integral, correspondiente, en cierto sentido, a la serie de Fourier en la que la sumación según el índice n se ha sustituido por la integración respecto de cierto parámetro:

$$\int_0^{+\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\,\mathrm{sen}\, xy]\,dy, \tag{56.1}$$

donde

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos yt\,dt, \tag{56.2}$$

$$b(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{sen}\, yt\,dt. \tag{56.3}$$

Las fórmulas (56.2) y (56.3) recuerdan las fórmulas para los coeficientes de Fourier.

Definición 1. *La integral* (56.1) *se llama integral de Fourier de la función f.*

Substituyendo (56.2) y (56.3) en la integral (56.1), transformemos esta última del

modo siguiente:

$$\int_0^{+\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\operatorname{sen} xy]dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos ty \cos xy + \operatorname{sen} ty \operatorname{sen} xy)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)dt. \qquad (56.4)$$

Así como la suma de una serie de Fourier de una función es igual, en ciertas condiciones, a la misma función, la integral de Fourier representa también la función de partida.

Teorema 1. *Supongamos que*

1) *la función f es continua a trozos en cada segmento finito y absolutamente integrable en toda la recta real;*

2) *en el punto x existe una derivada a la derecha $f'_+(x)$ y una derivada a la izquierda $f'_-(x)$. Entonces, para el punto citado x se verifica la fórmula*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)dt. \qquad (56.5)$$

La fórmula (56.5) lleva el nombre de Fourier.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos una integral

$$S(\eta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\eta} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)dt, \qquad (56.6)$$

donde $\eta > 0$, y x es un punto fijo en el que existen derivadas unilaterales $f'_+(x)$ y $f'_-(x)$.

Es obvio que la integral de Fourier

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)dt \qquad (56.7)$$

será el límite para la función (56.6) cuando $\eta \to +\infty$, es decir, $S(\eta)$ es en este sentido un análogo de las sumas parciales de las series de Fourier.

De conformidad con el teorema sobre la integración de integrales dependientes de un parámetro (véase el p. 53.1), para todo número $\xi > 0$ tenemos

$$\int_0^{\eta} dy \int_{-\xi}^{\xi} f(t)\cos y(x-t)dt = \int_{-\xi}^{\xi} f(t)dt \int_0^{\eta}\cos y(x-t)dy =$$

$$= \int_{-\xi}^{\xi} f(t)\frac{\operatorname{sen}\eta(x-t)}{x-t}dt. \qquad (56.8)$$

En efecto, ya que la función $f(t)$ es continua a trozos, sirviéndonos de las rectas paralelas al eje Oy, podemos dividir el rectángulo $-\xi \leqslant t \leqslant \xi$, $0 \leqslant y \leqslant \eta$, en un número finito de rectángulos, en cada uno de los cuales la función $f(t)\cos y(x-t)$ ya será continua, como función de dos variables, hasta la frontera (si en la frontera de los rectángulos mencionados por valores de la función f se toman, cuando sea necesario, sus límites unilaterales, es decir, $f(t+0)$ o bien $f(t-0)$). Al aplicar el teorema 3 del p. 53.1 a todo rectángulo y sumar los resultados obtenidos, obtendremos precisamente la fórmula (56.8).

De la desigualdad obvia

$$|f(t)\cos y(x-t)| \leqslant |f(t)|$$

y de la convergencia de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$ proviene la convergencia uniforme, en el segmento $[0, \eta]$ respecto del parámetro y, de la integral

$$F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)dt, \qquad (56.9)$$

es decir,

$$F(y, \xi) = \int_{-\xi}^{\xi} f(t)\cos y(x-t)dt$$

tiende al límite (56.9), para $\xi \to +\infty$, uniformemente en el segmento $[0, \eta]$.

Luego, la función $F(y, \xi)$ es continua respecto de y. Efectivamente, la función f está acotada en el segmento $[-\xi, \xi]$: $|f(t)| \leqslant M$, $-\xi \leqslant t \leqslant \xi$. Designemos con $\omega(\delta)$ el módulo de continuidad de la función $\cos y(x-t)$, $0 \leqslant y \leqslant \eta$, $-\xi \leqslant t \leqslant \xi$. Entonces, $\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$, y, por eso

$$|F(y+\Delta y, \xi) - F(y, \xi)| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\xi}^{\xi} |f(t)|\,|\cos(y+\Delta y)(x-t) - \cos y(x-t)|\,dt \leqslant 2M\xi\omega(\Delta y) \to 0$$

cuando $\Delta y \to 0$.

En virtud del teorema 2 del p. 53.1, en el primer miembro de la igualdad (56.8) podemos pasar al límite bajo el signo de la integral para $\xi \to +\infty$.

Como resultado tendremos

$$S(\eta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\operatorname{sen}\eta(x-t)}{x-t}dt.$$

Esta integral es finita, pues (véanse (56.6) y (56.9)) es igual $\int_0^{\eta} F(y)dy$, donde la función $F(y)$ es continua como un límite, para $\xi \to +\infty$, de una familia de funciones $F(y, \xi)$ convergentes según y.

La integral $S(\eta)$ es un análogo de la integral de Dirichlet para las series de Fourier. Al poner $u = t - x$ (compárese con (55.17)), obtendremos

$$S(\eta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u + x)\frac{\operatorname{sen}\eta u}{u}\,du.$$

Representando la integral obtenida como una suma de dos integrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{+\infty}$$

y realizando en la primera de ellas la sustitución $u = -t$, obtenemos

$$S(\eta) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}[f(x + t) + f(x - t)]\frac{\operatorname{sen}\eta t}{t}\,dt.$$

Al recordar (véase el p. 54.4) que para $\eta > 0$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}\eta t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2},$$

obtenemos

$$S(\eta) - \frac{f(x + 0) + f(x - 0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{-\infty}[f(x + t) + f(x - t)]\frac{\operatorname{sen}\eta t}{t}\,dt -$$

$$- [f(x + 0) + f(x - 0)]\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}\eta t}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{f(x + t) - f(x + 0)}{t}\operatorname{sen}\eta t\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{f(x - t) - f(x - 0)}{t}\operatorname{sen}\eta t\,dt. \quad (56.10)$$

Consideremos, por ejemplo, la primera integral que figura en el segundo miembro de esta igualdad. Dividámosla en dos integrales:

$$\int_{0}^{+\infty} = \int_{0}^{1} + \int_{1}^{\infty}.$$

Por cuanto

$$\lim_{t \to +0}\frac{f(x + t) - f(x + 0)}{t} = f'_{+}(x),$$

entonces $\frac{f(x + t) - f(x + 0)}{t}$ es una función continua a trozos de la variable t en el segmento $[0, 1]$, por lo cual, en virtud del teorema 2 del p. 55.2.

$$\lim_{\eta \to +\infty}\int_{0}^{1}\frac{f(x + t) - f(x + 0)}{t}\operatorname{sen}\eta t\,dt = 0. \quad (56.11)$$

La función $\frac{f(x + t)}{t}$ es también continua a trozos en cualquier segmento del semieje $t \geqslant 1$, y, como

$$\left|\frac{f(x + t)}{t}\right| \leqslant |f(x + t)|,$$

se tiene

$$\int_{1}^{+\infty}\left|\frac{f(x + t)}{t}\right|dt \leqslant \int_{1}^{+\infty}|f(x + t)|\,dt = \int_{x + 1}^{+\infty}|f(s)|\,ds \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}|f(s)|\,ds \leqslant +\infty,$$

es decir, $\frac{f(x + t)}{t}$ es absolutamente integrable en este semieje, y, por lo tanto, en virtud del mismo teorema.

$$\lim_{\eta \to +\infty}\int_{1}^{+\infty}\frac{f(x + t)}{t}\operatorname{sen}\eta t\,dt = 0. \quad (56.12)$$

Por fin, de la convergencia de la integral $\int_{0}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dt$ (véase el p. 33.6), al realizar el cambio de la variable $u = \eta t$, obtenemos

$$\lim_{\eta \to +\infty}\int_{1}^{+\infty}\frac{f(x + 0)}{t}\operatorname{sen}\eta t\,dt = f(x + 0)\lim_{\eta \to +\infty}\int_{\eta}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}u}{u}\,du = 0. \quad (56.13)$$

De (56.11), (56.12) y (56.13) se deduce que

$$\lim_{\eta \to +\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{f(x + t) - f(x + 0)}{t}\operatorname{sen}\eta t\,dt = 0.$$

De modo análogo se demuestra que

$$\lim_{\eta \to +\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{f(x - t) - f(x - 0)}{t}\operatorname{sen}\eta t\,dt = 0.$$

De aquí, en virtud de (56.10), obtendremos

$$\lim_{\eta \to +\infty}S(\eta) = \frac{f(x + 0) + f(x - 0)}{2}.$$

Por cuando el límite en el primer miembro es igual a la integral de Fourier (56.7), la igualdad (56.5) queda demostrada. □

Los requisitos impuestos sobre la función en este teorema pueden debilitarse al exigir, por ejemplo, que la función sea absolutamente integrable en todo el eje numérico y satisfaga en todo punto la condición generalizada de Hölder. No lo hemos hecho para hacer la demostración más simple (compárese con la demostración del teorema 4 y sus corolarios en el p. 55.4).

Ejercicio 1. Demuéstrese que si la función f es, en adición a las restricciones impuestas sobre ella en el teorema 1, par o impar, entonces quedan válidas las siguientes fórmulas: para una función par

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos yx\,dy \int_0^{+\infty} f(t)\cos yt\,dt,$$

para una función impar

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} yx\,dy \int_0^{+\infty} f(t)\operatorname{sen} yt\,dt.$$

56.2. DIFERENTES FORMAS DE NOTACIÓN DE LA FÓRMULA DE FOURIER

Para simplificar las notaciones se considerará en adelante que la función f es absolutamente integrable en todo el eje numérico $\boldsymbol{R}$ y en todos los puntos de éste es continua y tiene derivadas unilaterales. En este caso para cualquier $x \in \boldsymbol{R}$, de acuerdo con el teorema 1, resulta lícita la fórmula de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt,$$

y, por cuanto la función subintegral es par respecto de la variable y, entonces

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt. \qquad (56.14)$$

Por ser obvia la desigualdad

$$|f(t)\operatorname{sen} y(x-t)| \leqslant |f(t)|,$$

siendo vigentes las restricciones impuestas sobre la función f, existe también la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\operatorname{sen} y(x-t)\,dt,$$

con la particularidad de que, en virtud del criterio de Weierstrass (véase el p. 54.1), converge uniformemente en todo el eje numérico de la variable y y, por consiguiente, es una función continua de y. Por eso para cualquier número η existe una integral

$$\int_{-\eta}^{\eta} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\operatorname{sen} y(x-t)\,dt, \qquad (56.15)$$

y es, además, nula, puesto que la función subintegral es impar respecto de y. Sin embargo, asumidas las suposiciones referentes a la función f, no se puede garantizar la existencia de la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\operatorname{sen} y(x-t)\,dt. \qquad (56.16)$$

Para obtener las fórmulas necesarias, hemos de introducir una generalización más del concepto de integral.

56.3. VALOR PRINCIPAL DE UNA INTEGRAL

Introduzcamos la siguiente definición.

Definición 2. *Sea φ una función integrable en cualquier segmento finito. Si existe un límite finito*

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int_{-\eta}^{\eta} \varphi(x)\,dx, \quad \eta > 0,$$

se denominará valor principal de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ *y se designará brevemente v.p.*

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\eta \to +\infty} \int_{-\eta}^{\eta} \varphi(x)\,dx. \qquad (56.17)$$

Subrayemos que la diferencia de esta definición de la que caracteriza una integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$, en el sentido de la definición dada en el p. 33.1, consiste en que para la función φ, integrable en cualquier segmento finito, la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx$ se definía como un límite de las integrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx$, cuando tendían independientemente ξ hacia $-\infty$ y η hacia $+\infty$. En el caso que se considera ahora sólo se exige la existencia del límite de las integrales citadas $\int_{\xi}^{\eta} \varphi(x)dx$ para un caso particular en que $\xi = -\eta$ y $\eta \to +\infty$.

De este mismo modo se determina también el valor principal de la integral impropia en un punto: supongamos que $a < c < b$ y la función φ es integrable según Riemann, para cualquier $\varepsilon > 0$, en los segmentos $[a, c-\varepsilon]$ y $[c + \varepsilon, b]$ (se supone, naturalmente, que $a < c - \varepsilon$ y $c + \varepsilon < b$); entonces el valor principal de la

integral $\int_a^b \varphi(x)dx$ en el punto c se determinará mediante la fórmula

$$v.p. \int_a^b \varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} \varphi(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} \varphi(x)dx \right].$$

A veces, cuando ello no pueda llevar a las equivocaciones, la integral en el sentido del valor principal se designa simplemente con el símbolo integral, omitiéndose las letras *v.p.*

Si para una cierta función existe la integral impropia, dicha función dispone también del valor principal de la integral y éste coincide con la integral impropia de la función. Lo recíproco no es cierto: para una función puede existir (y, por consiguiente, ser finito) el valor principal de la integral, mientras que la integral impropia es divergente.

Por ejemplo, las integrales $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ y $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ no existen como impropias, no obstante existen en el sentido del valor principal, el cual en ambos casos es igual a cero.

56.4. NOTACIÓN COMPLEJA DE LA INTEGRAL DE FOURIER

Volveremos a la fórmula de Fourier (56.14) y la escribiremos en otra forma, sirviéndonos del concepto de valor principal de la integral. Puesto que la función subintegral en la integral (56.16) es impar respecto de y, con arreglo a la definición enunciada del valor principal de la integral, tenemos

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{sen} y(x - t)dt = 0. \tag{56.18}$$

Al multiplicar ambos miembros de esta igualdad por $\frac{i}{2\pi}$ y sumar con la integral (56.14), obtendremos

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iy(x-t)}dt, \tag{56.19}$$

donde la integral exterior se entiende en el sentido del valor principal. La fórmula (56.19) lleva el nombre de *notación compleja de la integral de Fourier*.

56.5. TRANSFORMACIÓN DE FOURIER

Si ponemos

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}dt,$$

la fórmula (56.19) tendrá por expresión

$$f(x) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(y)e^{ixy}dy. \tag{56.20}$$

Definición 3. *La función Φ que se pone en correspondencia con la función f por la fórmula*

$$\Phi(y) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}dt, \tag{56.21}$$

se denomina transformación de Fourier de la función f y se designa $F[f]$ o bien $\hat{f}$.

En esta definición $f(t)$ es, en el caso general, una función de valores complejos del argumento real. Notemos que la función $\Phi = F[f]$ puede adquirir valores esencialmente complejos incluso cuando la función f toma sólo valores reales.

La transformación de Fourier está definida, en particular, para todas las funciones absolutamente integrables. Por ejemplo, empleando para la transformación de Fourier de la función f la designación $\hat{f}$, podemos escribir la fórmula (56.20) en la forma

$$f(x) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)e^{ixy}dy. \tag{56.20'}$$

Esta fórmula permite restablecer la propia función f, si se sabe su transformación de Fourier $\hat{f}$. Se denomina *fórmula de inversión.*

Definición 4. *La función Ψ que se pone en correspondencia con la función f mediante la fórmula*

$$\Psi(y) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iyt}dt, \tag{56.22}$$

se llama transformación inversa de Fourier de la función f y designa por $F^{-1}[f]$.

La transformación de Fourier y la transformación inversa de Fourier están definidas en un conjunto de funciones, para las cuales las integrales (56.21) y (56.22) existen en el sentido del valor principal. Este conjunto contiene dentro de sí, en particular, el conjunto de todas las funciones absolutamente integrables en todo el eje real, para las cuales las integrales en las fórmulas (56.21) y (56.22) pueden entenderse como integrales impropias ordinarias y no sólo como integrales en el sentido del valor principal. El término "transformación inversa de Fourier" se justifica por lo que la transformación F^{-1} convierte la transformación de Fourier F. Con más precisión, es válido el siguiente lema.

Lema 1. *Si una función f, continua y absolutamente integrable en todo el eje, tiene en cada punto derivadas unilaterales finitas, entonces*

$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f.$$

DEMOSTRACIÓN. La primera fórmula de inversión, es decir, la fórmula $F^{-1}[F[f]] = f$ es simplemente otra notación de la fórmula ya demostrada (56.19).

Probemos la validez de la segunda fórmula de inversión. Por cuanto el coseno es una función par, podemos en (56.14) cambiar de lugares t y x;

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(t - x)dt,$$

y, por ser impar el seno (compárese con (56.18)),

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\operatorname{sen} y(t - x)dt = 0.$$

Por eso, a la par con la fórmula (56.19), tenemos también

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iy(t - x)}dt,$$

o bien

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ity}dt\right] e^{ixy}dy,$$

donde la integral exterior se toma en el sentido del valor principal. Esta fórmula puede ser escrita en la forma

$$F[F^{-1}[f]] = f. \ \square$$

Indiquemos que la validez de las fórmulas de inversión puede demostrarse también para restricciones más débiles impuestas sobre la función en comparación con aquellas que prevén la existencia en cada punto de las derivadas unilaterales.

Lema 2. *Supongamos que para las funciones f_1 y f_2 existe la transformación de Fourier (la transformación inversa de Fourier, respectivamente). Entonces, cualesquiera que sean los números λ_1 y λ_2, para las funciones $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ también existe la transformación de Fourier (la transformación inversa de Fourier, respectivamente), con la particularidad de que*

$$F[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2] = \lambda_1 F[f_1] + \lambda_2 F[f_2]$$

$$(F^{-1}[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2] = \lambda_1 F^{-1}[f_1] + \lambda_2 F^{-1}[f_2], \textit{ respectivamente}).$$

Esta propiedad lleva el nombre de *linealidad de la transformación de Fourier* (de la transformación inversa de Fourier, respectivamente). Ella proviene inmediatamente de la linealidad de la integral y de las fórmulas (56.21) y (56.22).

Corolario. $F[0] = F^{-1}[0] = 0$.

En efecto, por ejemplo,

$$F[0] = F[0 \cdot 0] = 0 \cdot F[0] = 0.$$

Esta última propiedad se deduce, naturalmente, asimismo de las fórmulas (56.21) y (56.22).

Lema 3. *La transformación de Fourier F, al igual que la transformación inversa de Fourier F^{-1}, son las aplicaciones biunívocas de un conjunto de funciones continuas absolutamente integrables en todo el eje real, que tienen en cada punto derivadas unilaterales, en otro conjunto de funciones, para las cuales las integrables (56.21) y (56.22) existen en el sentido del valor principal.*

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente demostrar sólo la biunivocidad de las aplicaciones F y F^{-1}, puesto que lo demás ya ha sido demostrado más arriba. Demostremos, por ejemplo, la biunivocidad de la aplicación F. Sea $F[f_1] = F[f_2]$; entonces

$$F^{-1}[F[f_1]] = F^{-1}[F[f_2]].$$

De aquí, de acuerdo con el lema 1, se desprende que

$$f_1 = f_2. \ \square$$

En todo caso la transformación de Fourier está definida para las funciones absolutamente integrables. En los puntos que siguen se estudiarán las propiedades de esta transformación. Más adelante aún se mostrará como la transformación de Fourier se generaliza a las clases más amplias de funciones, a saber, a las funciones de cuadrado integrable (el p. 58.7*) y las así llamadas funciones generalizadas.

56.6. INTEGRALES DE LAPLACE

Hallemos la transformación de Fourier $\hat{f}$ de la prolongación par de la función e^{-ax}, $a > 0$, desde la semirecta $x \geqslant 0$ a toda la recta numérica, es decir, hablando sencillamente, la transformación de Fourier de la función $f(x) = e^{-a|x|}$, $-\infty < x < +\infty$:

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}e^{-ixy}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{ax}e^{-ixy}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-ax}e^{-ixy}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-(a - iy)x}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-(a + iy)x}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a - iy} + \frac{1}{a + iy}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2 + y^2}.$$

La aplicación de la transformación inversa de Fourier a la función obtenida da la función de partida

$$e^{-ax} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2 + y^2}e^{ixy}dy, \quad x \geqslant 0.$$

Recordando que $e^{ixy} = \cos xy + i \operatorname{sen} xy$ y notando que, en virtud de que la función subintegral de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} xy}{a^2 + y^2} dy = 0$ obtendremos

$$e^{-ax} = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos xy}{a^2 + y^2} dy = \frac{2a}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos xy}{a^2 + y^2} dy, \; x \geqslant 0.$$

Hallemos ahora la transformación de Fourier $\hat{f}$ de la prolongación impar de la función e^{-ax}, $a > 0$, desde el semieje positivo $x > 0$, es decir, la transformación de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x > 0, \\ -e^{ax} & x < 0. \end{cases}$$

Tenemos

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} (-e^{ax}) e^{-ixy} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-ax} e^{ixy} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{a - iy} + \frac{1}{a + iy} \right) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{a^2 + y^2} i.$$

Al aplicar nuevamente la fórmula de inversión de la transformación de Fourier, obtendremos

$$e^{-ax} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{a^2 + y^2} i \right) e^{ixy} dy = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{y \operatorname{sen} xy}{a^2 + y^2} dy, \quad x > 0.$$

Así pues, hemos logrado no sólo hallar la transformación de Fourier de las funciones en consideración, sino también obtener directamente de la fórmula de inversión (56.20′) los valores de dos integrales

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos xy}{a^2 + y^2} dy = \frac{\pi}{2a} e^{-ax}, \quad x \geqslant 0,$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{y \operatorname{sen} xy}{a^2 + y^2} dy = \frac{\pi}{2} e^{-ax}, \quad x > 0.$$

Estas últimas se llaman *integrales de Laplace*.

56.7. PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMACIONES DE FOURIER DE LAS FUNCIONES ABSOLUTAMENTE INTEGRABLES

En este punto y en los que siguen serán consideradas algunas propiedades de la transformación de Fourier de la función f, la cual se designará, como hasta ahora,

mediante $\hat{f}$ o $F[f]$. Se supondrá, además, que la función f toma, en el caso general, los valores complejos, mientras que su argumento es, como siempre, real.

Lema 4. *Si la función f es absolutamente integrable en todo el eje numérico, su transformación de Fourier $\hat{f}(y)$ está acotada en todo el eje, con la particularidad de que*

$$|\hat{f}(y)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx. \tag{56.23}$$

Corolario. *Si una sucesión de las funciones absolutamente integrables $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, y una función absolutamente integrable $f(x)$ son de tal género que*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)| \, dx = 0,$$

entonces la sucesión $\{\hat{f}_n(y)\}$ converge uniformemente en todo el eje numérico hacia la función $\hat{f}(y)$.

DEMOSTRACIÓN. La desigualdad (56.23) se infiere de la fórmula (véase (56.21))

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dy, \tag{56.24}$$

si se tiene presente que $|e^{-ixy}| = 1$. □

El corolario se deduce inmediatamente de la desigualdad (56.23) y la linealidad de la transformación de Fourier, pues

$$|\hat{f}_n(y) - \hat{f}(y)| = |\widehat{f_n(x) - f(x)}| \underset{(56.23)}{\leqslant} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)| \, dx. \; □$$

Lema 5. *Si la función f es absolutamente integrable en todo el eje numérico, su transformación de Fourier $\hat{f}(y)$ es continua y*

$$\lim_{y \to \pm\infty} \hat{f}(y) = 0. \tag{56.25}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $f(x) = u(x) + iv(x)$, donde $u(x)$ y $v(x)$ son unas funciones reales absolutamente integrables. Por cuanto $\hat{f}(x) = \hat{u}(x) + i\hat{v}(x)$, para demostrar la continuidad de la función $\hat{f}(y)$ es suficiente demostrar la continuidad de las funciones $\hat{u}(x)$ y $\hat{v}(x)$. Aquí $u(x)$ y $v(x)$ son, como siempre, las funciones de valores reales de un argumento real, mientras que $\hat{u}(x)$ y $\hat{v}(x)$ son, en el caso general, funciones de valores complejos de un argumento real.

De acuerdo con el lema 2 del p. 55.2, para cualquier función $f(x)$, que es real y absolutamente integrable en todo el eje, existe una sucesión de funciones escalonadas finitas $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, tales que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(x) - f(x)| \, dx = 0.$$

En virtud del corolario 4, la sucesión $\{\hat{\varphi}_n(y)\}$ converge uniformemente hacia la función $\hat{f}(y)$. Para convencerse de que la función $\hat{f}(y)$ es continua, es sufuciente demostrar que las funciones $\hat{\varphi}_n(y)$ son continuas (véase el teorema 8′ en el p. 36.4). Mostrémoslo. Toda función escalonada finita es una combinación lineal de funciones de un solo escalón (véase el p. 55.2), con más precisión, de funciones características de los semiintervalos de tipo $[a, b)$. Por eso, debido a la linealidad de la transformación de Fourier, la continuidad de la función $\hat{f}$ será demostrada, si probamos que para la función característica de cualquier semiintervalo $[a, b)$ su transformación de Fourier es continua.

Sea ω una función característica del semiintervalo $[a, b)$, es decir, $\omega(x) = 1$, si $a \leqslant x < b$, y $\omega(x) = 0$, si $x < a$ ó $x \geqslant b$. Entonces, en virtud de (56.21), para $y \neq 0$, tenemos

$$\hat{\omega}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-ixy}dx = -\frac{1}{iy\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-ixy}d(-ixy) = $$

$$= \frac{i}{y\sqrt{2\pi}}e^{-ixy}\Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{i(e^{-iby} - e^{-iay})}{y\sqrt{2\pi}}.$$

En el caso de $y = 0$, en vista de la misma fórmula (56.21),

$$\hat{\omega}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b dx = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}}.$$

Así pues,

$$\hat{\omega}(y) = \begin{cases} \dfrac{i(e^{-iby} - e^{-iay})}{y\sqrt{2\pi}} & \text{para } y \neq 0, \\ \dfrac{b-a}{\sqrt{2\pi}} & \text{para } y = 0. \end{cases}$$

Es evidente que el segundo miembro de esta igualdad es una función continua para cualquier $y \neq 0$. Probemos que es también continua cuando $y = 0$.

$$\lim_{y\to 0}\frac{i(e^{-iyb} - e^{-iya})}{y\sqrt{2\pi}} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}[(1 - iby + o(y)) - $$

$$-(1 - iay + o(y))] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{y\to 0}\left[b - a + \frac{o(y)}{y}\right] = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}},$$

es decir: la función $\hat{\omega}(y)$ es realmente continua en el punto $y = 0$.

De este modo queda demostrada la continuidad en todo el eje numérico de la transformación de Fourier $\hat{f}$ de una función f absolutamente integrable en todo el eje numérico que toma valores reales. De aquí, según lo dicho anteriormente, proviene inmediatamente la continuidad de la transformación de Fourier $\hat{f}$ de la función $f = u + iv$ absolutamente integrable en todo el eje numérico, es decir, de una función que, en el caso general, toma también valores complejos.

La igualdad (56.25) se infiere del teorema 2, p. 55.2. En efecto, supongamos nuevamente al principio que la función f es absolutamente integrable en todo el eje numérico y toma sólo valores reales, entonces

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos xy\,dx - i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\,xy\,dx\right],$$

donde, en virtud del teorema citado, las partes real e imaginaria y, por consiguiente, la propia función $\hat{f}(y)$ tienden a cero cuando $y \to \pm\infty$.

Ahora, si $f = u + iv$, entonces, según lo demostrado $\lim\limits_{y\to\pm\infty}\hat{u}(y) = \lim\limits_{y\to\pm\infty}\hat{v}(y) = 0$, por consiguiente, $\lim\limits_{y\to\pm\infty}\hat{f}(y) = 0$.

56.8. TRANSFORMACIÓN DE FOURIER DE LAS DERIVADAS

Teorema 2. *Supongamos que una función f, absolutamente integrable en todo el eje numérico, tiene n derivadas absolutamente integrables y continuas en todo el eje. Entonces,*

$$F[f^{(k)}] = (iy)^k F[f], \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{56.26}$$

y existe una constante $M > 0$ tal que

$$|F[f]| \leqslant \frac{M}{|y^n|}. \tag{56.27}$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que la función f admite sólo valores reales. Si f es absolutamente integrable en todo el eje junto con su derivada f' y esta derivada es continua, entonces

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt.$$

Dado que la integral $\int_{-\infty}^{+\infty}|f'(t)|\,dt$ converge de conformidad con la hipótesis del teorema, entonces converge también la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)dt$, por lo cual, en virtud de la definición de convergencia de una integral, existen los límites $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\int_0^x f'(t)dt$ y, por consiguiente, los límites $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$. Además, de la convergencia de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ se deduce que los límites citados son iguales a cero: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Al aplicar la integración por partes a la fórmula de la transformación de Fourier, obtendremos:

$$F[f'] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-ixy}\, dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-ixy} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{iy}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx = iyF[f].$$

De este modo, la derivación de una función conduce a la multiplicación de su transformación de Fourier por el factor iy.

Si ahora $f = u + iv$, donde u y v son funciones reales, y esta vez de nuevo f es absolutamente integrable junto con su derivada $f' = u' + iv'$ y esta última es continua, entonces

$$F[f'] = F[u' + iv'] = F[u'] + iF[v'] = iyF[u] - yF[v] =$$
$$= iyF[u + iv] = iyF[f].$$

La fórmula (56.26) queda demostrada para $n = 1$. Para n arbitrario ésta se obtiene por inducción.

La función $F[f^{(n)}]$ está acotada (véase el lema 4), por lo cual la cota superior $M = \sup\limits_{-\infty < y < +\infty} F[f^{(n)}]$ es finita y, por consiguiente, la estimación (56.27) se desprende de la fórmula (56.26) para $k = n$. □

Así pues, cuanto mayor es el número de las derivadas absolutamente integrables que tiene la función f, tanto más rápido tiende a cero en el infinito su transformación de Fourier.

Ha de notarse que el teorema 2, al igual que su demostración, quedan en vigor también en el caso cuando la derivada de n-ésimo orden de la función en consideración no es continua, sino que tiene un número finito de discontinuidades de primera especie (véase el p. 5.1), conservándose sin cambios otras suposiciones. En efecto, en el caso dado la derivada citada es, en cualquier segmento finito, una función continua a trozos (véase el p. 28.3) y por esta razón la integración por partes, a la que se recurre en la demostración, es lícita (véanse los pp. 30.2 y 33.2)

Ejercicio 2. Demuéstrese que la transformación de Fourier $F(y)$ de la función $f(x) = \frac{1}{1 + |x|^3}$ es igual a $O\left(\frac{1}{y^3}\right)$ cuando $y \to \infty$.

56.9. CONVOLUCIÓN Y TRANSFORMACIÓN DE FOURIER

Supongamos que las funciones φ y ψ están definidas en todo el eje real. En diferentes problemas matemáticos se emplea a menudo la así llamada *convolución de las funciones* φ y ψ, la que se designa por $\varphi * \psi$ o, si x es el argumento de la convolución, mediante $(\varphi * \psi)(x)$ y se determina con la igualdad

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x - t)dt. \tag{56.28}$$

En este punto supondremos, para simplificar, que las funciones en consideración $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ admiten sólo los valores reales. La integral (56.28) existe a ciencia cierta, si ambas funciones están acotadas y son absolutamente integrables*). Además, la integral (56.28) y, más aún, la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x - t)|\, dt$$

son uniformemente convergentes en todo el eje real. Efectivamente, en virtud de que la función ψ está acotada se tiene $|\psi| \leqslant M$, donde M es una constante, por lo cual para cualquiera x y t

$$|\varphi(t)\psi(x - t)| \leqslant M|\varphi(t)|$$

y la afirmación enunciada se deduce, en virtud de la integrabilidad absoluta de la función φ, del criterio de Weierstrass para la convergencia uniforme de integrales (véase el p. 54.1). De los razonamientos aducidos se desprende, además, que si las funciones φ y ψ están acotadas y son absolutamente integrables y continuas, su convolución f es también continua, acotada y absolutamente integrable. En efecto, la continuidad de la función f proviene de la convergencia uniforme de la integral (56.28) y el carácter acotado, de la estimación

$$|(\varphi * \psi)(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x - t)|\, dt \leqslant M \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\, dt.$$

Demostremos la integrabilidad absoluta de la convolución. Sea $f = \varphi * \psi$; tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x - t)dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x - t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x - t)|\, dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(s)|\, ds. \tag{56.29}$$

El cambio del orden de integración en este caso es posible en virtud de que (véase el teorema 7 del p. 54.3) la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x - t)|\, dt$ converge uniformemente en todo el eje, la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x - t)|\, dx = |\varphi(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x - t)|\, dx$ converge uniformemente en cualquier segmento finito (¿por qué?), y la integral reiterada $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x - t)|\, dt$ existe, según se pone de manifiesto de la última igualdad de la fórmula (56.29).

*) La existencia de la integral (56.28) puede garantizarse también para las condiciones más generales, sin embargo no nos detendremos en esto.

De este modo, asumidas las suposiciones especificadas, podemos aplicar a la función $f = \varphi * \psi$ la operación de convolución con una función continua acotada y absolutamente integrable (como resultado, se obtendrá nuevamente una función de la misma clase) o la transformación de Fourier.

La operación de convolución de las funciones es *conmutativa y asociativa* en la clase de funciones en consideración. En efecto, al realizar en la integral (56.28) el cambio de la variable $x - t = s$, obtendremos

$$\varphi * \psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x - t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x - s)\psi(s)ds = \psi * \psi$$

Luego, realizando en la integral que viene abajo el cambio de la variable $t = y - \xi$, cambiando el orden de integración y haciendo la sustitución $x - y + \xi = \eta$, obtendremos

$$(\varphi * \psi) * \chi = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(y - x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x - t)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(y - x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y - \xi)\psi(x - y + \xi)d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y - \xi)d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x - y + \xi)\chi(y - x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y - \xi)d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\eta)\chi(\xi - \eta)d\eta = (\psi * \chi) * \varphi = \varphi * (\psi * \chi).$$

La posibilidad de cambiar el orden de integración en este caso también se desprende del teorema 7d el p. 54.3. En efecto, investiguemos la convergencia uniforme de las integrales

$$\chi(y - x) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y - \xi)\psi(x - y + \xi)d\xi, \tag{56.30}$$

$$\varphi(y - \xi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x - y + \xi)\chi(y - x)dx. \tag{56.31}$$

Puesto que las funciones ψ y χ son acotadas, se tiene $|\psi| \leqslant M$, $|\chi| \leqslant M$, donde M es una constante, por lo cual

$$|\chi(y - x)\varphi(y - \xi)\psi(x - x + \xi)| \leqslant M^2|\varphi(y - \xi)|,$$
$$|\varphi(y - \xi)\psi(x - y + \xi)\chi(y - x)| \leqslant M^2|\chi(y - x)|.$$

De estas igualdades y del hecho de que las funciones φ y χ son absolutamente integrables se deduce, de acuerdo con el criterio de Weierstrass, que las integrales (56.30) y (56.31) convergen uniformemente respecto de las variables x y ξ, respectivamente (la variable y está fija) en cualquier segmento finito (¿por qué?). Por fin, existe una integral reiterada

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi(y - x)\varphi(y - \xi)\psi(x - y + \xi)|d\xi = (|\varphi| * |\psi|) * |\chi|.$$

De este modo, todas las condiciones del teorema mencionado 7 del p. 54.3 están cumplidas.

Cabe notar que al considerar las convoluciones de las funciones, se pueden debilitar considerablemente las restricciones que se imponen sobre las funciones de convolución. No obstante, la demostración de las propiedades de convoluciones en este caso exigiría, ante todo, unos teoremas más delicados sobre el cambio del orden de integración. No lo hicimos aquí con el fin de simplificar la exposición.

Procedamos ahora al estudio de la transformación de Fourier de la convolución de dos funciones. Transformemos, para la comodidad, la definición de la convolución $\varphi * \psi$, añadiendo el factor adicional $1/\sqrt{2\pi}$:

$$\varphi * \psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x - t)dt.$$

Teorema 3. *Sean φ y ψ las funciones acotadas, continuas y absolutamente integrables en todo el eje numérico. En este caso tenemos*

$$F[\varphi * \psi] = F[\varphi]F[\psi].$$

DEMOSTRACIÓN. Las funciones φ y ψ son acotadas, continuas y absolutamente integrables y por ello la función $\varphi * \psi$ posee las mismas propiedades, en particular, es absolutamente integrable y para ella puede considerarse la transformación de Fourier

$$F[\varphi * \psi] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}dx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x - t)dt.$$

Cambiando aquí el orden de integración (lo que es posible en virtud del teorema 7 del p. 54.3) y realizando el cambio de la variable $x = t + s$, obtendremos

$$F[\varphi * \psi] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x - t)e^{-ixy}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{-ity}dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(s)e^{-isy}ds = F[\varphi]F[\psi],$$

es decir, la transformación de Fourier de una convolución de dos funciones es igual al producto de las transformaciones de Fourier de dichas funciones. □

El teorema 3 puede ser demostrado también para restricciones más débiles impuestas sobre las funciones en consideración, pero no nos detendremos en esto.

56.10. DERIVADA DE LA TRANSFORMACIÓN DE FOURIER DE UNA FUNCIÓN

Teorema 4. *Si la función $f(x)$ es continua y las funciones $f(x)$, $xf(x)$, . . . , $x^n f(x)$ son absolutamente integrables en todo el eje numérico, entonces la transfor-*

mación de Fourier de la función f será una función n veces derivable en todo el eje numérico y

$$i^k F^{(k)}[f] = F[x^k f], \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que la función f toma sólo valores reales. Derivando formalmente la integral

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx$$

respecto del parámetro y y observando que $|xf(x)e^{-ixy}| = |xf(x)|$, obtendremos la integral absoluta e uniformemente convergente

$$-i \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) e^{-ixy} dx, \quad -\infty < y < +\infty.$$

Por consiguiente (véase el p. 54.3, teorema 8) en este caso la transformación de Fourier $F[f]$ de la función f es una función derivable e

$$iF'[f] = F[xf].$$

Si, ahora, $f = u + iv$, donde u y v son unas funciones reales obtenemos

$$F'[f] = F'[u + iv] = \{F[u] + iF[v]\}' = F'[u] + iF'[v] =$$
$$= -iF[xu] + F[xv] = -iF[xu + ixv] = -iF[xf].$$

A continuación, por inducción obtenemos que la transformación de Fourier $F[f]$ de la función f tiene derivadas hasta el orden n inclusive e $i^k F^{(k)}[f] = F[x^k f]$, $k = 0, 1, \ldots, n$. □

Corolario. *Si las suposiciones del teorema están cumplidas, todas las derivadas $F^{(k)}[f]$, $k = 0, 1, \ldots, n$, son continuas y tienden a cero cuando su argumento tiende al infinito.*

En vista del lema 5, el corolario se deduce inmediatamente, ya que las derivadas $F^{(k)}[f]$ son las transformaciones de Fourier de las funciones absolutamente integrables.

Se puede mostrar que si los productos del tipo $e^{a|x|^\alpha} f(x)$ son absolutamente integrables, asumidas ciertas restricciones impuestas sobre $a > 0$ y $\alpha > 0$, esto conduce a que la transformación de Fourier se hace aún más suave, a saber, la transformación mencionada pertenece ya a unas u otras clases de funciones analíticas.

La fórmula que determina la transformación inversa de Fourier se diferencia de la que da la transformación directa de Fourier (véanse (56.21) y (56.22)) sólo en que el número e bajo el signo integral tiene i sustituido por $-i$ en el exponente de la potencia, razón por la cual para la transformación inversa de Fourier son válidas las propiedades análogas a las demostradas para la transformación directa de Fourier.

Ejercicios. 3. Demuéstrese que la transformación de Fourier de la función $f(x) = \frac{1}{1 + x^4}$ es dos veces derivable en todo el eje numérico.

4. Demuéstrese que la transformación de Fourier de la función $f(x) = xe^{-|x|}$ es infinitamente derivable en todo el eje numérico.

§ 57. ESPACIOS FUNCIONALES

57.1. ESPACIOS MÉTRICOS

Definición 1. *El conjunto $X = \{x, y, z, \ldots\}$ se llama espacio métrico X, si en un conjunto de pares ordenados (x, y) de elementos de este conjunto viene definida una función no negativa $\rho(x, y)$, llamada distancia (o métrica), tal que:*

1) $\rho(x, y) = 0$ *cuando, y sólo cuando,* $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $x \in X$, $y \in X$;

3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$, $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$.

Las condiciones 1, 2 y 3 se denominan *axiomas de distancia.*

Los elementos del espacio métrico llevan el nombre de *puntos.*

Ejemplos. 1. Una totalidad de todos los números reales R forma un espacio métrico, siempre que la distancia entre los números reales se define como valor absoluto de la diferencia entre ellos:

$$\rho(x, y) = |x - y|, \quad x \in R, \quad y \in R.$$

2. Un conjunto de todos los números complejos C forma también un espacio métrico, si la distancia entre los elementos del conjunto se define según la fórmula $\rho(z, z') = |z - z'|$, $z \in C$, $z' \in C$.

3. Un espacio euclídeo R^n de dimensión n (véase el p. 18.1) es un espacio métrico, si la distancia entre sus puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ se determina por la fórmula (véase (18.1))

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

4. Sea X cierto conjunto. Consideraremos un conjunto de funciones numéricas que son acotadas en X y que toman valores reales (o complejos). Para dos funciones de esta índole φ y ψ pongamos

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{t \in X} |\varphi(t) - \psi(t)|. \tag{57.1}$$

Se comprueba con facilidad que la función $\rho(\varphi, \psi)$ es una métrica. La validez de las propiedades 1 y 2 de la distancia se ve claramente. Comprobemos la validez de la propiedad 3. Supongamos que φ, ψ y χ son unas funciones acotadas definidas en el conjunto X. Para todo elemento $t \in X$ tenemos

$$|\varphi(t) - \chi(t)| = |[\varphi(t) - \psi(t)] + [\psi(t) - \chi(t)]| \leqslant$$
$$\leqslant |\varphi(t) - \psi(t)| + |\psi(t) - \chi(t)|,$$

por lo cual

$$|\varphi(t) - \chi(t)| \leqslant \sup_X |\varphi(t) - \psi(t)| + \sup_X |\psi(t) - \chi(t)|,$$

de donde

$$\sup_X |\varphi(t) - \chi(t)| \leqslant \sup_X |\varphi(t) - \psi(t)| + \sup_X |\psi(t) - \chi(t)|,$$

es decir,

$$\rho(\varphi, \chi) \leqslant \rho(\varphi, \psi) + \rho(\psi, \chi).$$

5. Sea G un conjunto abierto medible según Jordan del espacio euclídeo n-dimensional R^n. Un conjunto X de las funciones continuas en la clausura $\bar{G}$ del conjunto G forma un espacio métrico, si la distancia entre las funciones $\varphi \in X$ y $\psi \in X$ se determina mediante la fórmula

$$\rho(\varphi, \psi) = \int |\psi(x) - \varphi(x)| \, dG.$$

En efecto, si $\rho(\varphi, \psi) = 0$, es decir, si $\int |\psi(x) - \varphi(x)| \, dG = 0$, entonces, en virtud del corolario de la propiedad 9° de las integrales múltiples (véase el p. 44.6), $\varphi(x) = \psi(x)$ para todo $x \in G$ y, por ende, para todo $x \in \bar{G}$. La propiedad 2° de la distancia es, en este caso, evidente, y la propiedad 3° se comprueba con facilidad: si φ, ψ y χ son continuas en $\bar{G}$, se tiene

$$\rho(\varphi, \psi) = \int |\varphi(x) - \chi(x)| \, dG = \int |[\varphi(x) - \psi(x)] - [\psi(x) - \chi(x)]| \, dG \leqslant$$
$$\leqslant \int |\varphi(x) - \psi(x)| \, dG + \int |\psi(x) - \chi(x)| \, dG = \rho(\varphi, \psi) + \rho(\psi, \chi).$$

En el caso en que $n = 1$ y $\bar{G} = [a, b]$, la métrica introducida para las funciones continuas en el segmento $[a, b]$ tiene por expresión

$$\rho(\varphi, \psi) = \int_a^b |\varphi(x) - \psi(x)| \, dx. \qquad (57.2)$$

Un espacio semejante también se introduce del modo natural para las funciones que están definidas en un intervalo infinito. Por ejemplo, cuando $a = -\infty$, $b = +\infty$, la distancia para dos funciones continuas y absolutamente integrables en todo el eje numérico, φ y ψ, se determina según la fórmula

$$\rho(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x) - \psi(x)| \, dx. \qquad (57.3)$$

Todo subconjunto de un espacio métrico X es, a su vez, un espacio métrico respecto de la misma métrica y se llama *subespacio del espacio X*.

Definición 2. *Dos espacios métricos X y X' se llaman isométricos, si entre dos puntos suyos existe una correspondencia biunívoca f que mantiene inalterable la distancia, es decir, una correspondencia tal que si*

$$x' = f(x), \quad y' = f(y), \quad x \in X, \quad y \in X, \quad x' \in X', \quad y' \in X',$$

entonces $\rho(x, y) = \rho(x', y')$ (tales correspondencias se denominan isométricas).

Definición 3. *Sea X un espacio métrico; la sucesión de sus puntos $\{x_n\}$ se denomina convergente al punto $x \in X$, si $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x, x_n) = 0$, es decir, si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número n_ε tal que para cualesquiera números $n \geqslant n_\varepsilon$ se verifica la desigualdad $\rho(x, x_n) < \varepsilon$. En este caso se escribe $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, o bien $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$, y se dice que el punto x es el límite de la sucesión dada.*

Por ejemplo, la convergencia en los espacios métricos considerados en los casos 1 y 2 significa una convergencia ordinaria de las sucesiones numéricas (reales o complejas, respectivamente). En el ejemplo 3 la convergencia de la sucesión está representada por la convergencia de una sucesión de puntos en el espacio n-dimensional con la que ya nos hemos encontrado anteriormente (véase el p. 18.1). Es un espacio métrico de las funciones definidas y acotadas en cierto conjunto, donde la distancia entre las funciones se determina según la fórmula (57.1), la sucesión de funciones $\{\varphi_n\}$ converge hacia la función φ, si

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t \in X} |\varphi(t) - \varphi_n(t)| = 0,$$

es decir, si la sucesión de funciones $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente en el conjunto X hacia la función φ (véase el t. 1; p. 36.2).

Por fin, el ejemplo 5 proporciona el tipo de convergencia de las funciones en el sentido de cierta métrica integral. Cuando $n = 1$, la convergencia es similar a la que se ha encontrado en el p. 55.2 (lema 2) y en el p. 56.7 (corolario del lema 4).

Ejercicio 1. El conjunto E de un espacio métrico X se llama acotado, si

$$d(E) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in E, y \in E} \rho(x, y) < +\infty,$$

la magnitud $d(E)$ se denomina diámetro del conjunto E. Demuéstrese que toda sucesión convergente de un espacio métrico es acotada.

Definición 4. *La sucesión $\{x_n\}$ de puntos de un espacio métrico X se llama fundamental, si para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe tal número n_ε que se cumple la desigualdad*

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

cualesquiera que sean los números $n \geqslant n_\varepsilon$ y $m \geqslant n_\varepsilon$.

Lema 1. *Si la sucesión $\{x_n\}$ converge, es fundamental.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. En este caso para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe tal número n_ε que para todos los números $n \geqslant n_\varepsilon$ se verifica la desigualdad

$$\rho(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por consiguiente, si $n \geqslant n_\varepsilon$ y $m \geqslant n_\varepsilon$, entonces

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \ \square$$

Definición 5. *Un espacio métrico se llama completo, si toda sucesión fundamental de sus puntos converge hacia un punto que pertenece al mismo espacio.*

Es evidente que un espacio métrico que es isométrico respecto del espacio completo es también un espacio métrico completo.

Ejemplos. 6. Los espacios métricos de los números reales y complejos representan los ejemplos de espacios métricos completos. El espacio euclídeo n-dimen-

sional R^n (véase el p. 18.1) es también completo. Los números racionales ofrecen un ejemplo de espacio métrico incompleto.

7. Consideraremos un espacio métrico de las funciones definidas y acotadas en el conjunto X, donde la distancia entre las funciones se determina mediante la fórmula (57.1). En este espacio la sucesión de funciones φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, es fundamental, siempre que para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un número n_ε tal que se verifica la desigualdad

$$\rho(\varphi_n, \varphi_m) = \sup_X |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon$$

cualesquiera que sean los números $n \geqslant n_\varepsilon$ y $m \geqslant m_\varepsilon$, es decir, si la sucesión $\{\varphi_n\}$ satisface el criterio de Cauchy sobre la convergencia uniforme de la sucesión en el conjunto X (véase el p. 36.2). En vista de este criterio, la sucesión $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente en el conjunto X hacia cierta función φ, es decir,

$$\lim_{n \to \infty} \sup_X |\varphi(x) - \varphi_n(x)| = 0. \tag{57.4}$$

Mostremos que esta función φ es también acotada y, por lo tanto, pertenece al espacio en consideración. En efecto, en virtud de (57.4), para todo número $\varepsilon > 0$, en particular para $\varepsilon = 1$, existe un número n_1 tal que se verifica la desigualdad

$$|\varphi(x) - \varphi_n(x)| < 1;$$

cualesquiera que sean $n \geqslant n_1$ y $x \in E$, razón por la cual

$$|\varphi(x)| \leqslant |\varphi(x) - \varphi_{n_1}(x)| + |\varphi_{n_1}(x)| < 1 + \sup_X |\varphi_{n_1}(x)|.$$

Puesto que la función φ_{n_1} está acotada, lo es también la función φ. Hemos demostrado de este modo que el espacio de funciones que se considera es completo.

Se puede probar que el espacio métrico de funciones consideradas en el ejemplo 5 no es completo.

Para cualquier espacio métrico X se introduce de modo natural el concepto de ε-entorno $U(x, \varepsilon)$ del punto $x \in X$, $\varepsilon > 0$:

$$U(x, \varepsilon) = \{y : y \in R, \quad \rho(y, x) < \varepsilon\},$$

y luego textualmente, al igual que para el espacio n-dimensional R^n (véase el t. 1, p. 18.2), se introducen los conceptos de punto adherente de un conjunto, de puntos límites y aislado, de puntos interior y de frontera, el concepto de clausura $\bar{A}$ del conjunto A, el de conjuntos cerrado y abierto.

Para los espacios métricos arbitrarios son válidos también los lemas 3, 4, 5 y 6, demostrados en el p. 18.2, para los conjuntos abiertos y cerrados de los espacios euclídeos n-dimensionales, con la particularidad de que las demostraciones aducidas en el p. 18.2, quedan en vigor también en el caso general.

Definición 6. *El conjunto A de un espacio métrico X se llama denso en el espacio X, si la clausura $\bar{A}$ del conjunto A coincide con el espacio X: $\bar{A} = X$.*

Por ejemplo, un conjunto de los números racionales es denso en el conjunto de números reales.

Es evidente que la propiedad de un conjunto de ser denso en el espacio se conserva cuando se realizan las aplicaciones isométricas de este espacio.

Definición 7. *El espacio métrico completo X^* se llama completación del espacio métrico X, si en el espacio X^* existe un subconjunto X', denso en X^* e isométrico respecto del espacio X.*

Por ejemplo, el conjunto de números reales es una completación del conjunto de números racionales.

A veces resulta cómodo "identificar" los elementos de los espacios X y X' que corresponden uno al otro en la correspondencia isométrica de los espacios X y X', y considerar, de este modo, el conjunto X como un subconjunto de su completación X^*. Explicaremos más detalladamente la operación de identificación de los elementos de dos espacios isométricos X e Y. Sean X e Y^* unos espacios métricos, $Y \subset Y^*$, y f: $X \to Y$, la aplicación isométrica. Examinemos el conjunto $X^* = X \cup (Y^* \setminus Y)$, que se obtiene del espacio X por adición a este último del conjunto $Y^* \setminus Y$. De este modo: $X^* \setminus X = Y^* \setminus Y$. Definamos para los puntos $x \in X^*$ e $y \in X^*$ el concepto de distancia $\rho_{X^*}(x, y)$. Introduzcamos, con el fin de comodidad, la aplicación F: $X^* \to Y^*$, que se da por la fórmula

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in X, \\ x, & \text{si } x \in X^* \setminus X. \end{cases}$$

Está claro que F es una aplicación biunívoca (biyección) del conjunto X^* sobre Y^*.

Ahora, para cualesquiera $x \in X^*$ e $y \in Y^*$ pongamos

$$\rho_{X^*}(x, y) = \rho(F(x), F(y)).$$

Es fácil comprobar que la función $\rho_{X^*}(x, y)$, definida del modo indicado, satisface tres axiomas de distancia y, por lo tanto, X^* es un espacio métrico, mientras que la aplicación F aplica isométricamente el espacio X^* sobre Y^*, con la particularidad de que, realizándose dicha aplicación, el conjunto X se convierte en Y. Por eso, si el conjunto Y fue denso en el espacio Y^*, entonces el conjunto X será denso en el espacio X^*.

Cuando decimos "identifiquemos en el espacio Y^* el conjunto X con el espacio Y, que es isométrico respecto de X", sobreentendemos el estudio del espacio X^* en lugar de Y^*.

Mostremos que para cualquier espacio métrico incompleto existe su completación, es decir, probemos que todo espacio métrico incompleto es un subconjunto denso en cierto espacio métrico completo.

Teorema 1. *Para todo espacio métrico existe su completación.*

DEMOSTRACIÓN.

I. ESTRUCTURA DE LA COMPLETACIÓN X^* DEL ESPACIO MÉTRICO DADO X.

Dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ de elementos del espacio X se llamarán *equivalentes*, si

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = 0. \tag{57.5}$$

La equivalencia entre dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ se designa mediante el símbolo $\{x_n\} \sim \{y_n\}$; la equivalencia posee las siguientes propiedades:

1°. Cualquier sucesión $\{x_n\}$ es equivalente a sí misma: $\{x_n\} \sim \{x_n\}$.

2°. Si $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, entonces $\{y_n\} \sim \{x_n\}$.

3°. Si $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ e $\{y_n\} \sim \{z_n\}$, entonces $\{x_n\} \sim \{z_n\}$.

Para nosotros serán de interés sólo las sucesiones fundamentales del espacio X. El conjunto de éstas se descompone en las clases disjuntas de las sucesiones equivalentes entre sí. Designemos estas clases por $x^*, y^*, z^*, \ldots$, y su totalidad mediante X^*. Si una sucesión fundamental $\{x_n\}$ está contenida en la clase x^*, esto se escribirá, como siempre, de la manera siguiente: $\{x_n\} \in x^*$.

II. DETERMINACIÓN DE LA DISTANCIA $\rho^*(x^*, y^*)$ EN X^*.

Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones fundamentales del espacio métrico X. La sucesión numérica $\rho(x_n, y_n)$ será también fundamental, es decir, satisfará la condición de Cauchy (véase el p. 4.7). En efecto, para cualesquiera números n y m

$$\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, y_m) + \rho(y_m, y_n)$$

y, por lo tanto, en virtud de la simetría de los índices n y m,

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m). \tag{57.6}$$

De lo que las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son fundamentales se deduce que para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un número n_ε tal que se cumplen las desigualdades

$$\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{57.7}$$

cualesquiera que sean los números $n \geqslant n_\varepsilon$ y $m \geqslant n_\varepsilon$. De (57.6) y (57.7), para $n \geqslant n_\varepsilon$ y $m \geqslant n_\varepsilon$, obtenemos

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| < \varepsilon.$$

Por consiguiente, la sucesión numérica $\{\rho(x_n, y_n)\}$ es fundamental, es decir, satisface la condición de Cauchy y, por ende, es convergente.

Sea $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$. Pongamos, por definición, $\rho^*(x^*, y^*) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n)$. En virtud de lo demostrado, el límite mencionado existe. Mostremos que la función $\rho^*(x^*, y^*)$, definida de esta forma, no depende de la elección de las sucesiones fundamentales $\{x_n\} \in x^*$ e $\{y_n\} \in y^*$ y satisface los axiomas de distancia.

Sea $\{x_n\} \in x^*$, $\{x_n'\} \in x^*$, $\{y_n'\} \in y^*$, $\{y_n'\} \in y^*$. En este caso

$$\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, x_n') + \rho(x_n', y_n') + \rho(y_n, y_n')$$

y

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n', y_n')| \leqslant \rho(x_n, x_n') + \rho(y_n, y_n').$$

Por ser equivalentes las sucesiones $\{x_n\}$, $\{x_n'\}$, y, respectivamente, $\{y_n\}$, $\{y_n'\}$, obtendremos (véase (57.5)):

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, x_n') = \lim_{n \to \infty} \rho(y_n, y_n') = 0$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n \to \infty} \rho(x_n', y_n').$$

III. COMPROBACIÓN DE LOS AXIOMAS DE DISTANCIA PARA $\rho^*(x^*, y^*)$.

Sea $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$, $\{z_n\} \in z^*$. Si es que $\rho^*(x^*, y^*) = 0$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = 0$, es decir, las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son equivalentes lo que implica la coincidencia de los elementos x^* e y^*: $x^* = y^*$. De la igualdad $\rho(x_n, y_n) = \rho(y_n, x_n)$, pasando al límite para $n \to \infty$, obtendremos $\rho^*(x^*, y^*) = \rho^*(y^*, x^*)$, y de la desigualdad $\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, z_n) + \rho(z_n, y_n)$ obtenemos

$$\rho^*(x^*, y^*) \leqslant \rho^*(x^*, z^*) + \rho^*(z^*, y^*).$$

Así pues, X^* es un espacio métrico.

IV. CONSTRUCCIÓN DE UN SUBESPACIO DEL ESPACIO X^*, ISOMÉTRICO RESPECTO DEL ESPACIO X.

Sea $x \in X$. La sucesión $x_n = x$, $n = 1, 2, \ldots$, es obviamente fundamental. Pongamos en correspondencia a todo $x \in X$ un punto $x^* \in X^*$ tal que $\{x\} \in x^*$. Si, asumida la correspondencia citada, al punto x le corresponde el punto x^*, y al punto y, el punto y^*, entonces, evidentemente, para $x \neq y$ tendremos $x^* \neq y^*$, con la particularidad de que $\rho^*(x^*, y^*) = \lim\limits_{n \to \infty} \rho(x, y) = \rho(x, y)$, es decir, dicha correspondencia realiza una correspondencia isométrica biunívoca entre el espacio X y un cierto subconjunto X' del espacio X^*.

El punto x^* del espacio X^*, correspondiente al punto $x \in X$ en la correspondencia analizada lo denotaremos también, para simplificar, mediante x, y el espacio X', mediante X. Se puede considerar que los puntos correspondientes de los espacios X y X' quedan simplemente identificados (véase la observación que sigue la definición 7). En estas designaciones se tiene una inclusión isométrica

$$X \subset X^*.$$

V. DEMOSTRACIÓN DE LA DENSIDAD DE X EN X^*.

Probemos que todo punto x^* del espacio X^* es un punto de adherencia del conjunto X. Con este fin basta mostrar que para cualquier punto $x^* \in X^*$ existe una sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, que converge hacia x^*.

Sean $x^* \in X^*$ y $\{x_n\} \in x^*$, $x_n \in X$. Un punto del espacio X^*, que contiene una sucesión fundamental cuyos términos son todos iguales a un mismo punto x_n, lo designaremos, de acuerdo con el convenio asumido anteriormente, también mediante x_n. Demostremos que la sucesión $\{x_n\}$, $x_n \in X^*$, converge al punto $x^* \in X^*$. Fijemos el número $\varepsilon > 0$. De lo que la sucesión $\{x_n\}$ es fundamental se deduce que existe un número n_ε tal que se cumple la desigualdad

$$\rho(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{57.8}$$

cualesquiera que sean los números $n \geqslant n_\varepsilon$ y $m \geqslant n_\varepsilon$. Observando que según la definición de distancia en X^*

$$\rho^*(x^*, x_n) = \lim_{m \to \infty} \rho(x_m, x_n),$$

de la desigualdad (57.8) obtenemos, para $n \geqslant n_\varepsilon$,

$$\rho^*(x^*, x_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \rho^*(x^*, x_n) = 0,$$

lo que implica que x^* es un punto de adherencia del conjunto X. Así pues, $\bar{X} = X^*$.

VI. DEMOSTRACIÓN DE LA COMPLETITUD DEL ESPACIO X^*.

Sea $\{x_n^*\}$ una sucesión fundamental de puntos del espacio X^*, $x_n \in X$ y $\rho^*(x_n^*, x_n) < \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Tales puntos x_n existen en vista de que X es denso en X^*.

La sucesión $\{x_n\}$ es fundamental. Efectivamente, notando que

$$\rho^*(x_n, x_m) \leqslant \rho^*(x_n, x_n^*) + \rho^*(x_n^*, x_m^*) + \rho^*(x_m^*, x_m) < \frac{1}{n} + \rho^*(x_n^*, x_m^*) + \frac{1}{m},$$

elijamos el número n_ε de modo tal que sea

$$\rho^*(x_n^*, x_m^*) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3}$$

para cualesquiera $n \geqslant n_\varepsilon$ y $m \geqslant n_\varepsilon$. Entonces

$$\rho(x_n, x_m) = \rho^*(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \qquad (57.9)$$

para cualesquiera $n \geqslant n_\varepsilon$ y $m \geqslant n_\varepsilon$, es decir, la sucesión $\{x_n\}$ es fundamental.

Denotemos mediante x^* la clase de sucesiones equivalentes a la que pertenece la sucesión $\{x_n\}$. Es obvio que

$$\rho^*(x^*, x_n^*) \leqslant \rho^*(x^*, x_n) + \rho^*(x_n, x_n^*) = \rho^*(x^*, x_n) + \frac{1}{n}.$$

Pero, de (57.9) obtenemos, cuando $m \to \infty$ y $n \geqslant n_\varepsilon$:

$$\rho^*(x^*; x_n) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_m, x_n) \leqslant \varepsilon.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} \rho^*(x^*, x_n) = 0,$$

por lo cual también

$$\lim_{n\to\infty} \rho^*(x^*, x_n^*) = 0.$$

De este modo, hemos demostrado que la sucesión fundamental dada $\{x_n^*\}$ converge en X^*. La completitud de X^* queda demostrada. □

Ejercicio 2. Demuéstrese que la completación de un espacio métrico es única salvo unos espacios isométricos.

Definición 8. *Una función numérica f (de valores reales o complejos), definida en el conjunto A del espacio métrico X, se llama continua en el punto $x_0 \in A$ (o, más detalladamente, continua respecto del conjunto A en el punto $x_0 \in A$), si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que se cumple la desigualdad*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

cualesquiera que sean los puntos $x \in U(x_0, \delta) \cap A$.

Definición 9. *Una función f, definida en el conjunto A del espacio métrico X, se denomina continua en el conjunto $B \subset A$, si es continua respecto del conjunto A en todo punto $x_0 \in B$.*

Ejercicio 3. Enúnciese, con ayuda del concepto de sucesión, la definición de la continuidad en el punto x_0 de la función f, definida en el conjunto $A \ni x_0$, y demuéstrese que esta definición es equivalente a la definición 8.

Al igual que en el p. 36.4 (véase el t. 1), se demuestra textualmente que el límite de una sucesión de funciones continuas convergente uniformemente en el espacio métrico es una función continua.

Ejemplo. Consideremos un espacio métrico de funciones f, acotadas y continuas en cierto *espacio métrico* X, la distancia entre las cuales se determina según la fórmula (57.1). Por cuanto el carácter fundamental de la sucesión $\{f_n\}$ en el sentido de la métrica (57.1) significa que esta sucesión satisface la condición de Cauchy de convergencia uniforme en el conjunto X, entonces toda sucesión fundamental de las funciones continuas $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia cierta función f. Esta función f es, según lo dicho anteriormente, continua y, de acuerdo con lo demostrado más arriba en este punto, acotada en X, es decir, pertenece al espacio de funciones que se considera.

De este modo, un *espacio de funciones acotadas y continuas en el espacio métrico X es espacio métrico completo.* Es, evidentemente, un subespacio de todas las funciones acotadas en X cuya distancia se ha determinado según la fórmula (57.1).

En particular, ya que toda función continua en cierto compacto A, dispuesto en el espacio euclídeo n-dimensional R^n, está acotada (véase el p. 19.4), entonces el espacio de funciones continuas en el compacto A con la distancia definida según la fórmula (57.1) es completo.

Definición 10. *Sea X un espacio métrico. La función f, definida en un conjunto de pares ordenados (x, y), donde $x \in A$, $y \in B$, $A \subset X$, $B \subset X$, se llama continua en el punto (x_0, y_0), $x_0 \in A$, $y_0 \in B$, si para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se verifica la desigualdad $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$ cualesquiera que sean los pares (x, y) de tal género que $x \in U(x_0, \delta) \cap A$, $y \in U(y_0, \delta) \cap B$.*

Una función, continua en todo punto (x, y) de cierto conjunto de pares, se denomina continua en este conjunto.

Ejercicios. 4. Compruébense los axiomas de distancia para la función $\rho(\varphi, \psi)$ definida mediante la fórmula (57.3) para el espacio de funciones absolutamente integrables y continuas en todo el eje numérico.

5. Dése un ejemplo de sucesión de las funciones continuas que converge en cierto segmento en el sentido de la distancia (57.2), pero no converge en el mismo segmento en el sentido de convergencia en un punto (es decir, en el sentido de la definición 3, el p. 36.1).

6. Dése un ejemplo de sucesión que converge en cierto segmento en el sentido de convergencia en un punto, pero que no converge en el mismo segmento en el sentido de la distancia (57.2).

7. Demuéstrese que un espacio de las funciones continuas en el segmento $[a, b]$, la distancia entre las cuales se determina por la fórmula (57.2), no es completo.

57.2. ESPACIOS LINEALES

Definición 11. *Un conjunto* $X = \{x, y, z, \ldots\}$ *se llama espacio lineal real (o espacio vectorial sobre un campo de números reales), si:*

a todo par ordenado (x, y) *de elementos* $x \in X$ *e* $y \in X$ *se le ha puesto en correspondencia un elemento del espacio* X, *llamado suma de* x *e* y *y denotado por* $x + y$;

a todo elemento $x \in X$ *y a todo número real* λ *se les ha puesto en correspondencia el único elemento del espacio* X, *llamado producto de* λ *por* x *y denotado mediante* λx.

En este caso se cumplen los siguientes grupos de axiomas:

1. a) $x + y = y + x$ *para cualesquiera* $x \in X$ *e* $y \in X$;

b) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *para cualesquiera* $x \in X, y \in X$ *y* $z \in X$;

c) *en* X *existe un elemento, llamado nulo y denotado por* 0, *tal que* $x + 0 = x$ *para cualquier* $x \in X$;

d) *para todo* $x \in X$ *existe un elemento del conjunto* X, *llamado opuesto al elemento* x, *que se designa mediante* $-x$ *y es tal que* $x + (-x) = 0$.

2. a) $1x = x$ *para cualquier* $x \in X$;

b) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ *para todo* $x \in X$ *y cualesquiera números reales* λ *y* μ.

3. a) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ *para todo* $x \in X$ *y cualesquiera números reales* λ *y* μ;

b) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ *para cualesquiera* $x \in X, y \in Y$ *y cualquier número real* λ.

Para todo par de elementos $x \in X$ *e* $y \in Y$ el elemento $x + (-y)$ se llama diferencia de los elementos x e y, y se denota mediante $x - y$.

Si en la definición aducida de espacio lineal real se sustituyen todos los números reales por los complejos: $\lambda, \mu \in C$; se obtendrá, entonces, la definición del *espacio lineal complejo.*

Ejemplos. 1. El conjunto de todos los números reales (complejos) forma un espacio lineal real (complejo).

2. Sea X cierto conjunto. La totalidad $F(X)$ de todas las funciones $f: X \to R$ ($f: X \to C$, respectivamente), para la definición natural de su sumación y multiplicación por los números reales (complejos):

$$(f_1 + f_2)(x) \overset{\text{def}}{=} f_1(x) + f_2(x), \quad (\lambda f)(x) \overset{\text{def}}{=} \lambda(f(x)),$$
$$f_1 \in F(X), \quad f_2 \in F(X), \quad f \in F(X), \quad \lambda \in R \quad \text{o bien} \quad \lambda \in C,$$

será un espacio lineal real (complejo).

3. El conjunto de todos los polinomios de una variable con coeficientes reales (complejos) es un espacio real (complejo) lineal.

4. El conjunto de todos los polinomios de grados, no superiores a n natural, de una variable con los coeficientes reales (complejos) es un espacio lineal real (complejo).

5. Un espacio de toda clase de sucesiones numéricas $\{x_n\}$, $x_n \in R$ (o bien $x_n \in C$), $n \in N$, para la definición natural de la operación de su sumación y multiplicación por un número (véase el p. 4.9) es también espacio lineal.

Definición 12. *Un conjunto* X', *contenido en el espacio lineal* X *(real o complejo), se llama subespacio de este espacio, si todas las combinaciones lineales de elementos del conjunto* X' *se contienen en él.*

En otras palabras, el conjunto $X' \subset X$ es un subespacio del espacio X, si para cualesquiera dos elementos $x \in X'$, $y \in X'$ y cualesquiera números $\lambda \in R$, $\mu \in R$ ($\lambda \in C$, $\mu \in C$, respectivamente) tiene lugar la inclusión

$$\lambda x + \mu y \in X'.$$

Es evidente que el subespacio X' del espacio lineal X es, a su vez, un espacio lineal.

Si X es un espacio lineal y $x \in X$, entonces la totalidad de todos los elementos del espacio X del tipo λx, donde λ son números cualesquiera, sirve de ejemplo de subespacio del espacio X.

El conjunto de las funciones de valores reales y continuas en cierto conjunto $X \subset R^n$ es un subespacio del espacio de todas las funciones de valores reales, definidas en X.

Los elementos de los espacios lineales se llaman, comúnmente, *puntos* o *vectores.*

Definición 13. *Un sistema finito de vectores* $x_1, \ldots, x_n$ *del espacio lineal* X *(real o complejo) se llama linealmente dependiente, si existen tales números* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *(reales o complejos, respectivamente), no todos iguales a cero, que*

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0.$$

En el caso contrario, es decir, cuando de la igualdad citada se deduce que todos los números $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *son nulos, el sistema de vectores* $x_1, \ldots, x_n$ *se denomina linealmente independiente.*

Definición 14. *Un sistema de vectores* x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$ *(* $\mathfrak{A}$ *es un conjunto de índices), del espacio lineal* X *se llama linealmente independiente, si cualquiera de sus subsistemas finitos* $x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, \ldots, x_{\alpha_n}$ *es linealmente independiente.*

Ejercicios. 8. Demuéstrese que si el sistema x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, es linealmente independiente, entonces $x_\alpha \neq 0$ para cualesquiera $\alpha \in \mathfrak{A}$.

9. Demuéstrese que para que un sistema finito de vectores sea linealmente dependiente, es necesario y suficiente que por lo menos uno de los vectores sea una combinación lineal de los demás.

Definición 15. *Sea dado un conjunto* $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *de vectores del espacio lineal* X. *La totalidad de toda clase de combinaciones lineales finitas de los elementos de este conjunto, es decir, la totalidad de toda clase de vectores del tipo*

$$\lambda_1 x_{\alpha_1} + \lambda_2 x_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_k x_{\alpha_k},$$

donde $x_{\alpha_j} \in \{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *y* λ_j *son los números,* $j = 1, 2, \ldots, k$, *lleva el nombre de cápsula lineal del conjunto* $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$.

Definición 16. *Si en el espacio X (real o complejo) se tiene un sistema de n vectores linealmente independientes cuya cápsula lineal está representada por el espacio X, entonces dicho espacio se denomina n-dimensional y se denota por R^n, mientras que todo sistema ordenado de n vectores linealmente independientes cuya cápsula lineal está representada por el espacio R^n, se llama base del espacio.*

En otras palabras, los vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ son la base del espacio R^n, si:

1) los vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ son linealmente independientes;

2) para todo $x \in R^n$ existen tales números $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ que $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n$.

Los elementos del espacio R^n se denominan vectores n-dimensionales (reales o complejos, respectivamente).

Cualquier espacio n-dimensional se llama espacio de dimensión finita.

Ejercicios. 10. Demuéstrese que en un espacio n-dimensional cualquier sistema de vectores linealmente independientes, cuya cápsula lineal está representada por todo el espacio, se compone de n vectores.

11. Demuéstrese que todo sistema de n vectores linealmente independientes en un espacio n-dimensional es la base de éste.

Un ejemplo de espacio real n-dimensional lo constituye el espacio vectorial aritmético n-dimensional (véase el p. 18.4).

Por analogía con este último espacio puede construirse un espacio aritmético complejo n-dimensional C^n. Se denominan puntos de este espacio los sistemas ordenados de n números complejos: $x = (x_1, \ldots, x_n)\, x_j \in C, j = 1, 2, \ldots, n$. En este caso, si $x \in C^n$, $\lambda \in C$, se tiene

$$\lambda x \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n),$$

y para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in C^n$ e $y = (y_1, \ldots, y_n) \in C^n$

$$x + y \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

La base en este espacio la constituyen los vectores $e_i = \{\delta^i_1, \ldots, \delta^i_n\}$, donde δ^i_j es el así llamado *símbolo de Kronecker**)

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Es evidente que $x = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Como otro ejemplo de espacio lineal de dimensión finita interviene el espacio $\mathscr{P}^n$ de los polinomios de grados no superiores a n natural. Es $(n + 1)$-dimensional: su dimensión es igual al número de coeficientes que tienen los polinomios en consideración.

Definición 17. *La aplicación f de un espacio lineal X en otro espacio lineal Y se denomina aplicación lineal (o, que es lo mismo, operador lineal), si para cualesquiera dos elementos y cualesquiera números λ y μ se verifica la igualdad*

*) L. Kronecker (1823 — 1891), matemático alemán.

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

El conjunto de todos los operadores lineales $f\colon X \to Y$, que aplican el espacio lineal X en el espacio lineal Y, se designará mediante $\mathscr{L}(X, Y)$. Por comprobación inmediata nos convencemos con facilidad de que el conjunto $\mathscr{L}(X, Y)$, para la definición natural de sumación de sus elementos y multiplicación de ellos por un número, es decir, para la definición de estas operaciones según las fórmulas

$$(f_1 + f_2)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(x) + f_2(x), \quad f_1 \in \mathscr{L}(X, Y), \quad f_2 \in \mathscr{L}(X, Y),$$
$$(\lambda f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(f(x)), \quad f \in \mathscr{L}(X, Y), \quad \lambda \in R \text{ o } \lambda \in C$$
$$x \in X,$$

forma también un espacio lineal (real, si los espacios X e Y eran espacios lineales reales, o complejo, si X e Y eran complejos).

Definición 18. *Si $f\colon X \to Y$ e Y es un espacio lineal, entonces el conjunto $\{x\colon f(x) = 0\} \subset X$ se llama núcleo de la aplicación f y se denota mediante $\ker f$*):*

$$\ker f \stackrel{\text{def}}{=} \{x\colon f(x) = 0\}.$$

Lema 2. *Para que la aplicación lineal $f\colon X \to Y$ de un espacio lineal X en otro espacio lineal Y sea una aplicación biunívoca de X en Y, es decir, sea una inyección, es necesario y suficiente que su núcleo se componga sólo en un elemento nulo:*

$$\ker f = 0.$$

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Evidentemente, cualquier operador lineal f hace pasar cero en cero, pues para todo $x \in X$ tenemos: $f(0) = f(0x) = 0f(x) = 0$. Por eso, si f es una inyección, no existe $x \neq 0$ tal que sea $f(x) = 0$. Esto precisamente es un testimonio de que $\ker f = 0$.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Sea $\ker f = 0$ y $f(x) = f(y)$. Entonces, por ser lineal la aplicación f, se tiene $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0$, es decir, $x - y \in \ker f$ y, como $\ker f = 0$, se tiene $x - y = 0$. Por consiguiente $x = y$. Esto significa que f es una inyección. □

Como ejemplos de aplicaciones lineales biunívocas sirven las transformaciones directa e inversa de Fourier en los correspondientes espacios lineales de funciones (véanse los lemas 2 y 3 en el p. 56.5).

Definición 19. *Sean X e Y unos espacios lineales. La aplicación lineal biunívoca del espacio X sobre el espacio Y se denomina aplicación isomorfa o isomorfismo de los espacios lineales.*

Si para los espacios lineales X e Y existe una aplicación isomorfa de X sobre Y, se denominan isomorfos.

Dos espacios isomorfos pueden diferenciarse sólo en la naturaleza de sus elementos y no en las propiedades del espacio lineal en sí, por eso en lo que sigue los espacios lineales isomorfos no se distinguirán.

*) De la palabra inglés kernel (núcleo).

Ejercicio 12. Demuéstrese que todos los espacios lineales n-dimensionales son isomorfos entre sí.

Definición 20. *Un espacio lineal que no es de dimensión finita se llama espacio de dimensión infinita.*

Es obvio que un espacio lineal es de dimensión infinita cuando, y sólo cuando, no tiene una base finita.

Un ejemplo del espacio de dimensión infinita lo representa un espacio lineal de todos los polinomios de una sola variable. En efecto, este espacio está privado, a ciencia cierta, de base finita: cualquier combinación lineal del sistema finito dado de polinomios es un polinomio de grado no superior al del polinomio mayor del sistema citado, a consecuencia de lo cual los polinomios de grados superiores no pueden obtenerse por el procedimiento mencionado.

La tentativa de generalizar el concepto de base en el caso de los espacios de dimensión infinita lleva a sumas infinitas, es decir, a las series de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$. Para que haya sentido de hablar de su suma en el espacio X, en éste ha de ser definido el concepto de convergencia de las sucesiones. El punto que sigue está dedicado a la consideración de uno de los espacios de este género.

57.3. ESPACIOS NORMALIZADOS Y SEMINORMALIZADOS

Definición 21. *Un espacio lineal X (real o complejo) se denomina normalizado, si en el conjunto de sus puntos está definida una función real, llamada norma y denotada con $\|x\|_X$, o, en la forma más breve, $\|x\|$, $x \in X$, y que posee las siguientes propiedades:*

1°) $\|x\| \geqslant 0$, $x \in X$;

2°) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, $x \in X$, λ *es un número*;

3°) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, $x \in X$, $y \in X$;

4°) *si* $\|x\| = 0$, *se tiene* $x = 0$.

Indiquemos que de la propiedad 2° se deduce que si $x = 0$, entonces $\|x\| = 0$. En efecto, fijando un elemento $x \in X$ arbitrario, obtendremos

$$\|0\| = \|0 \cdot x\| = 0 \|x\| = 0.$$

Definición 22. *Si en el conjunto de puntos de un espacio lineal X está definida una función real $\|x\|$, $x \in X$, que satisface sólo las propiedades* 1°, 2°, 3°, *entonces el espacio X se llama seminormalizado y la función $\|x\|$, seminorma.*

La propiedad 2° de la norma (seminorma) se llama *homogeneidad* de la norma (seminorma) y la propiedad 3°, *desigualdad triangular.*

Demos a conocer que todo subconjunto de un espacio lineal seminormalizado (en particular, normalizado) que representa un subespacio del espacio lineal es, a su vez, un espacio lineal seminormalizado (normalizado, respectivamente).

Ejercicio 13. Aclárese si serán ¿norma? ¿seminorma? ¿para qué funciones? ¿para qué n? las expresiones $\sup_{a \leqslant t \leqslant b} |f^{(n)} t|$, $\int_a^b |f^{(n)}(t)| \, dt$.

57.4. EJEMPLOS DE ESPACIOS NORMALIZADOS Y SEMINORMALIZADOS

1. El conjunto de números reales y el de números complejos, si se toma por norma en ellos el valor absoluto de los números, forman espacios lineales normalizados.

2. Si en un espacio n-dimensional aritmético real R^n la norma del vector $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ se define como su longitud (véase el p. 18.4)

$$\|x\| \overset{\text{def}}{=} |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2},$$

entonces R^n será un espacio lineal normalizado.

3. Un espacio n-dimensional aritmético complejo C^n (véase el p. 57.2) será normalizado, si ponemos

$$\|x\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in C^n.$$

4. En un espacio n-dimensional aritmético real R^n puede introducirse no sólo la norma coincidente con la longitud $|x|$ de sus elementos $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$. Por ejemplo, pongamos

$$\|x\|_p \overset{\text{def}}{=} (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < +\infty,$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i = 1, 2, \ldots, n} |x_i|.$$

Es evidente que la longitud del vector coincide con la norma $\|x\|_2$. Comprobemos el cumplimiento de los axiomas de las normas para $\|x\|_r$, $1 \leqslant r \leqslant +\infty$. Para $r = 1$, según la propiedad del valor absoluto de números se tiene

$$\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Apliquemos la desigualdad de Minkowski para el caso en que $1 < p < +\infty$ (véase el p. 35.8*):

$$\|x + y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{1/p} =$$

$$= \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Para $\|x\|_\infty$ tenemos

$$\|x + y\|_\infty = \max_{i = 1, 2, \ldots, n} |x_i + y_i| \leqslant \max_{i = 1, 2, \ldots, n} (|x_i| + |y_i|) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{i = 1, 2, \ldots, n} |x_i| + \max_{i = 1, 2, \ldots, n} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Las demás propiedades de las normas para $\|x\|_r$, $1 \leqslant r \leqslant +\infty$, se comprueban de una manera más fácil.

Ejercicio 14. Demuéstrese que $\|x\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|x\|_p$, $x \in R^n$.

Definición 23. *Dos normas* $\|x\|$ *y* $\|x\|^*$ *en un espacio lineal normalizado* X *se llaman equivalentes, si existen unas constantes* $c_1 > 0$ *y* $c_2 > 0$ *tales, que para cualesquiera* $x \in X$ *se verifica la desigualdad*

$$c_1\|x\| \leqslant \|x\|^* \leqslant c_2\|x\|.$$

Teorema 2. *En un espacio lineal de dimensión finita todas las normas son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X un espacio lineal de dimensión finita. Por consiguiente, existe en él una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ compuesta de cierto número $n \in N$ de sus elementos y para cualquier $x \in X$ se tiene una, y sólo una, base

$$x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n.$$

Sea $\|x\|$ una norma en el espacio X. Mostremos que es equivalente a la norma cuadrática

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Por cuanto dos normas, cada una de las cuales es equivalente a la tercera, son también equivalentes entre sí, de esto se deducirá que todas las normas de cualquier espacio de dimensión finita son equivalentes.

Hemos de notar, ante todo, que $c_1 \stackrel{\text{def}}{=} \|e_1\| + \ldots + \|e_n\| > 0$, pues para todo $k = 1, 2, \ldots, n$, se verifica la desigualdad $e_k \neq 0$, y, por ende, $\|e_k\| > 0$. Luego, de la desigualdad evidente

$$|x_k| \leqslant \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \|x\|_2, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

obtenemos, sirviéndose de la propiedad de la norma, la desigualdad

$$\|x\| = \|x_1e_1 + \ldots + x_ne_n\| \leqslant |x_1|\,\|e_1\| + \ldots + |x_n|\,\|e_n\| \leqslant$$
$$\leqslant (\|e_1\| + \ldots + \|e_n\|)\|x\|_2 = c_1\|x\|_2.$$

Así pues, existe tal $c_1 > 0$ que para todo $x \in X$ se tiene

$$\|x\| \leqslant c_1\|x\|_2.$$

Demostremos ahora que existe tal $c_2 > 0$ que

$$\|x\| \geqslant c_2\|x\|_2.$$

Por cuanto, siendo $x = 0$, esta desigualdad se cumple, evidentemente, para cualquier $c_2 > 0$, será suficiente demostrarla sólo para el caso en que $x \neq 0$. Elijamos una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ en el espacio X de manera tal que se componga de los vectores unidad en el sentido de la norma cuadrática

$$\|e_1\|_2 = \ldots = \|e_n\|_2 = 1.$$

Esto es siempre factible, puesto que si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base del espacio lineal y $\|\cdot\|$ es una norma en dicho espacio, entonces

$$\left\{\frac{e_1}{\|e_1\|}, \ldots, \frac{e_n}{\|e_n\|}\right\}$$

será también su base, con la particularidad de que la norma de todos los elementos suyos será igual a 1:

$$\left\|\frac{e_k}{\|e_k\|}\right\| = \frac{1}{\|e_k\|}\|e_k\| = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

El espacio X provisto de la base elegida puede considerarse como un espacio n-dimensional aritmético (véase el p. 18.4). Para esto es suficiente asignar a todo su vector $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ un surtido ordenado de n números $(x_1, \ldots, x_n)$ que representan sus coordenadas respecto de la base citada. En este caso la norma cuadrática $\|x\|_2$ será la longitud del vector x:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = |x|.$$

La esfera unitaria $S^{n-1} = \{x: x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$ de este espacio es, como se sabe (véase el p. 18.3 y 18.4), un compacto. Consideraremos en dicha esfera una función

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \|x\|.$$

De la desigualdad

$$|f(x) - f(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|^{*)} \leqslant$$
$$\leqslant c_1\|x - y\|_2 = c_1|x - y|, \quad x \in X, \quad y \in X,$$

se infiere que dicha función es continua en todo el espacio X y, por lo tanto, en la esfera S^{n-1}.

Por cuanto para cualquier punto $x \in S^{n-1}$ tenemos $\|x\|_2 = 1$, entonces $x \neq 0$, por lo cual, en virtud de la propiedad 4° de la norma, la función f satisface en la esfera S^{n-1} la desigualdad $f(x) = \|x\| > 0$. De acuerdo con el teorema de Weierstrass, toda función continua en un compacto alcanza en éste su valor mínimo. Supongamos que la función f admite su mínimo en la esfera S^{n-1} en el punto $x_0 \in S^{n-1}$. Pongamos

$$c_2 \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in S^{n-1}} f(x) = f(x_0) > 0.$$

En este caso para cualquier $x \in S^{n-1}$ tendremos:

$$\|x\| = f(x) \geqslant f(x_0) = c_2.$$

Ahora, al observar que para todo $x \in X$, $x \neq 0$, el punto $\dfrac{x}{\|x\|_2}$ se dispone en la esfera S^{n-1}:

$$\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\|_2 = \frac{1}{\|x\|_2}\|x\|_2 = 1$$

*) Hemos aprovechado aquí la desigualdad $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|$. Es válida para cualesquiera elementos de un espacio seminormalizado y se deduce fácilmente de la propiedad 3° de la seminorma en la definición 21 (véase más abajo el lema 4 en el p. 57.5).

y, por lo tanto, para él se verifica $\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\| \geqslant c_2$, obtendremos

$$\|x\| = \left\|\|x\|_2 \frac{x}{\|x\|_2}\right\| = \left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\| \|x\|_2 \geqslant c_2\|x\|_2,$$

es decir,

$$\|x\| \geqslant c_2\|x\|_2, \quad x \in X, x \neq 0.$$

La equivalencia de las normas $\|x\|$ y $\|x\|_2$ queda demostrada. □

5. Sea nuevamente $1 \leqslant p < +\infty$. Consideremos un subespacio lineal de todas las sucesiones $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, $x_n \in R$ (o bien $x_n \in C$), compuesto de tales sucesiones, para las cuales

$$\|x\|_p \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} < +\infty. \tag{57.10}$$

La función $\|x\|_p$ es una norma, lo que se comprueba por analogía con el caso finito (véase el ejemplo 4), puesto que, en particular, la desigualdad de Minkowski es lícita también para las sumas infinitas.

Cuando todos los elementos de las sucesiones en consideración son números reales, su espacio con la norma (57.10) se denota con l_p.

6. En el p. 41.6 para el operador lineal $A: R^n \to R^m$ se ha introducido la norma según la fórmula (véase 41.41))

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |Ax|, \quad x \in R^n.$$

Es realmente una norma, en el sentido de la definición del p. 57.3, en el espacio lineal $\mathscr{L}(R^n, R^m)$, lo que se deducirá de los razonamientos a seguir.

Supongamos que X e Y son espacios normalizados lineales arbitrarios y $A: X \to Y$ es un operador lineal. Pongamos

$$\|A\| \overset{\text{def}}{=} \sup_{\|x\| < 1} \|Ax\|, \tag{57.11}$$

donde $\|x\| = \|x\|_X$ y $\|Ax\| = \|Ax\|_Y$.

Cuando los espacios lineales X e Y se eligen arbitrariamente, puede suceder que la cota superior $\|A\|$, determinada por la igualdad (57.11), no será finita para todo operador lineal $A: X \to Y$.

Sea $\mathscr{L}(X, Y)$, como siempre (véase el p. 57.2), un conjunto de todos los operadores lineales A que aplican el espacio X en el Y y sea $\mathscr{L}_c(X, Y)$ un conjunto de aquellos de los operadores citados, para los cuales $\|A\| < +\infty$. Probemos que $\mathscr{L}_c(X, Y)$ es también un espacio lineal y $\|A\|$, la norma en él. Si $A \in \mathscr{L}_c(X, Y)$ y $B \in \mathscr{L}_c(X, Y)$, entonces

$$\|A + B\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|(A + B)x\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax + Bx\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| + \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\| < +\infty,$$

y, por lo tanto, $A + B \in \mathscr{L}_c(X, Y)$. Para cualquier $\lambda \in R$ (o bien $\lambda \in C$, en el caso de espacios complejos)

$$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|\lambda Ax\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\lambda|\, \|Ax\| =$$

$$= |\lambda| \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = |\lambda|\, \|A\| < +\infty$$

y, por consiguiente, $\lambda A \in \mathscr{L}_c(X, Y)$. De este modo $\mathscr{L}_c(X, Y)$ de hecho es un espacio lineal.

Luego, es evidente que de (57.11) proviene inmediatamente que $\|A\| > 0$. Además, si $\|A\| = 0$, es decir, si $\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = 0$, entonces para todo x tal que $\|x\| < 1$ tiene lugar la igualdad $\|Ax\| = 0$, y, por lo tanto, también $Ax = 0$. Mas, en este caso, en general, para todo $x \in X$ tenemos también $Ax = 0$. En efecto, si x es un elemento del espacio X tal que $\|x\| > 1$, entonces, a ciencia cierta, $x \neq 0$, quiere decir,

$$\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = \frac{1}{\|x\|} \|x\| = 1.$$

Por eso, en virtud de lo demostrado, $A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0$. De aquí $\frac{1}{\|x\|} Ax = 0$, y, por ende, $Ax = 0$, cualquiera que sea $x \in X$. Esto significa que $A = 0$. Así pues, $\|A\|$ es realmente una norma en el espacio $\mathscr{L}_c(X, Y)$.

Si el valor de $\|A\|$, definido por la fórmula (57.11), es infinito: $\|A\| = +\infty$, diremos que la norma del operador A es infinita.

La norma $\|A\|$ (tanto finita como infinita) puede obtenerse también por un método un tanto diferente. A saber, resulta que

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad x \in X. \tag{57.12}$$

Para demostrar esta fórmula indiquemos que

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = \sup_{\|y\| = 1} \|Ay\|. \tag{57.13}$$

Efectivamente, por una parte es evidente que

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \geqslant \sup_{\|y\| = 1} \|Ay\|,$$

pues, al aumentar un conjunto numérico, su cota superior sólo puede crecer. Por otra parte, para cualquier elemento $x \in X$, tal que $0 < \|x\| \leqslant 1$, pongamos $y \overset{\text{def}}{=} \frac{x}{\|x\|}$; entonces $\|y\| = 1$ y $\|Ay\| = \frac{1}{\|x\|} \|Ax\| \geqslant \|Ax\|$. De aquí

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \leqslant \sup_{\|y\| = 1} \|Ay\|.$$

De las desigualdades obtenidas se deduce precisamente la igualdad (57.13).

Ahora tenemos:

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| = \sup_{\|y\| = 1} \|Ay\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} \|Ay\| = \|A\|,$$

es decir, la fórmula (57.12) queda también demostrada. De esta fórmula se deduce con toda la evidencia que para cualquier $x \in X$, $x \neq 0$,

$$\frac{\|A(x)\|}{\|x\|} \leqslant \|A\|,$$

y, por consiguiente, para cualquier $x \in X$ tiene lugar la desigualdad.

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| \|x\|,$$

donde $\|x\|$ es la norma en el espacio X, $\|Ax\|$, la norma en el espacio Y, y $\|A\|$, la norma en el espacio $\mathscr{L}(X, Y)$. Esta igualdad es, obviamente, una generalización de la desigualdad (41.42) del p. 41.6.

Existe un enfoque más al concepto de norma de un operador, relacionado con el concepto de los así llamados operadores acotados.

Definición 24. *Un operador $A: X \to Y$ se denomina acotado, si existe una constante $c > 0$ tal que para todos los elementos $x \in X$ se verifica la desigualdad.*

$$\|Ax\| \leqslant c\|x\|.$$

Si A es un operador lineal acotado, todas las constantes $c > 0$ que poseen la propiedad citada están acotadas inferiormente por cero, por lo cual su conjunto cuenta con una cota inferior finita no negativa. Designémosla mediante c_0:

$$c_0 = \inf\{c: \|Ax\| \leqslant c\|x\|, x \in X\}.$$

Mostremos que

$$c_0 = \|A\|.$$

Ante todo indiquemos que para cualquier elemento $x \in X$ la desigualdad

$$\|Ax\| \leqslant c_0\|x\|$$

es lícita. Efectivamente, si se encontrara un elemento $x_0 \in X$ tal que sea $\|Ax_0\| > c_0\|x_0\|$, existiría cierto $\varepsilon > 0$, para el cual se verificaría la desigualdad $\|Ax_0\| > (c_0 + \varepsilon)\|x_0\|$. Sin embargo, esto no es posible, puesto que con arreglo a la definición de cota interior existe un número $c > 0$ tal que $c < c_0 + \varepsilon$ y para todo $x \in X$ se cumple la desigualdad $\|Ax\| < c\|x\|$. En particular, $\|Ax_0\| \leqslant c\|x_0\| < (c_0 + \varepsilon)\|x_0\|$. De este modo, la cota inferior c_0 satisface también la desigualdad, mediante la cual se determina la acotación del operador A. Por ello, en la definición de la constante c_0 la cota inferior puede ser sustituida por un mínimo

$$c_0 = \min\{c: \|Ax\| \leqslant c\|x\|, x \in X\}.$$

De la desigualdad $\|Ax\| \leqslant c_0\|x\|$, para $x \neq 0$, tenemos

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant c_0,$$

de donde

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant c_0, \quad x \in X.$$

El caso de la desigualdad estricta

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < c_0, \quad x \in X,$$

no es posible, pues en tal caso existiría un número $\varepsilon > 0$ tal que

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < c_0 - \varepsilon$$

y, por consiguiente, para todo $x \in X$, $x \neq 0$, sería válida con mayor razón la desigualdad

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} < c_0 - \varepsilon, \quad \text{o bien} \quad \|Ax\| < (c_0 - \varepsilon)\|x\|, \quad x \in X,$$

lo que contradiría la elección de c_0 en calidad de una constante mínima que posee la propiedad $\|Ax\| \leqslant c\|x\|$, $x \in X$.

Así pues,

$$c_0 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|.$$

Hablando metafóricamente, esta igualdad significa que el operador A está acotado cuando, y sólo cuando, tiene norma finita. De este modo, el conjunto de operadores acotados constituye el espacio $\mathscr{L}_c(X, Y)$.

En el p. 41.6 fue mostrado que todo operador lineal $A: X \to Y$ tiene una norma finita en el caso cuando los espacios normalizados lineales X e Y sean de dimensión finita y a título de normas en dichos espacios se hayan tomado normas cuadráticas $\|x\|_2$ e $\|y\|_2$, $x \in X$, $y \in Y$. Por cuanto en los espacios lineales de dimensión finita todas las normas son equivalentes (véase el teorema 2 en el ejemplo 4), de aquí se deduce que

todo operador lineal A, que aplica el espacio lineal de dimensión finita A en otro espacio lineal, también de dimensión finita Y, está acotado, cualesquiera que sea la elección de las normas en estos espacios, es decir, en este caso

$$\mathscr{L}(X, Y) = \mathscr{L}_c(X, Y).$$

7. Un espacio lineal de todas las funciones reales acotadas, definidas en el conjunto arbitrario X, que representa un subespacio del espacio $F(X)$ de todas las funciones reales $f: X \to R$ (véase el p. 57.2) se convierte en un espacio normalizado, siempre que se introduce en él una norma según la siguiente fórmula

$$\|f\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t \in X} |f(t)|. \tag{57.14}$$

Designemos este espacio mediante $S(X)$. En el caso en que X sea un espacio métrico, el subespacio del espacio $S(X)$, compuesto de las funciones f continuas en X, se

designará con $C(X)$*), y la norma (57.14) en dicho espacio se denotará, asimismo, mediante $\|f\|_C$.

Si X es un compacto en R^n, entonces (véase el teorema 3 en el p. 19.6)

$$\|f\|_C = \sup_{t \in X} |f(t)| = \max_{t \in X} |f(t)|.$$

En particular, esto es cierto para el espacio $C[a, b]$ de funciones continuas en el segmento $[a, b]$ de la recta numérica.

8. Sea fijado un número p, $1 \leqslant p < +\infty$. Estudiemos un conjunto de funciones f definidas en cierto segmento $[a, b]$ y tales que la integral

$$\int_a^b |f(x)|^p dx$$

converge. Es fácil comprobar que este conjunto forma un espacio lineal que se denota mediante $RL_p[a, b]$**).

Pongamos

$$\|f\|_p \overset{\text{def}}{=} \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p}. \tag{57.15}$$

Mostremos que (57.15) es una seminorma en $RL_p[a, b]$. Es evidente que de la fórmula (57.15) se deduce inmediatamente que $\|f\|_p \geqslant 0$. Con ello, de la condición $\|f\|_p = 0$ no se desprende que $f = 0$. En efecto, consideremos por ejemplo una función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x = a, \\ 0 & \text{para } x \in (a, b]. \end{cases}$$

Está claro que $\|f\|_p = 0$, pero la función f no es idénticamente nula en el segmento $[a, b]$, razón por la cual no es cero del espacio lineal $RL_p[a, b]$.

Comprobemos la homogeneidad de la expresión (57.14): para cualesquiera $f \in RL_p[a, b]$ y cualquier $\lambda \in R$ (o bien $\lambda \in C$) tenemos

$$\|\lambda f\|_p = \left[\int_a^b |\lambda f(t)|^p dt\right]^{1/p} = |\lambda| \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p} = |\lambda|\, \|f\|_p.$$

Demostremos para (57.15) la desigualdad triangular. Cualesquiera que sean las funciones $f \in RL_p[a, b]$ y $g \in RL_p[a, b]$, de acuerdo con la desigualdad de Minkowski para las integrales (véase el p. 28.4*), obtendremos:

$$\|f + g\|_p = \left[\int_a^b |f(t) + g(t)|^p dt\right]^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_a^b |f(t)|^p\, dt\right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(t)|^p dt\right]^{1/p} = \|f\|_p + \|g\|_p.$$

*) C es la primera letra de la palabra latina "continuum".

**) R es la primera letra del apellido B. Riemann; L, la primera letra del apellido H. Lebesgue.

Así pues, $\|f\|_p$ es, de hecho, una seminorma (que no es una norma) en el espacio lineal $RL_p[a, b]$.

Una construcción análoga es válida también para los intervalos infinitos; los correspondientes espacios seminormalizados se designarán también mediante RL_p.

9. Analicemos un conjunto de todas las funciones continuas en el segmento $[a, b]$. Es un espacio lineal. Ya sabemos que se puede introducir en él la norma $\|f\|_C$, definida en el ejemplo 7 de este punto. Se puede también considerar en dicho espacio la seminorma (57.15), con la particularidad de que la seminorma (57.15) ya será en él una norma.

En efecto, si la función f es continua en el segmento $[a, b]$ y $\|f\|_p = 0$, $1 \leqslant p < +\infty$, y, por consiguiente,

$$\int_a^b |f(x)|^p dx = 0,$$

entonces de lo que la función $|f(x)|^p$, $x \in [a, b]$, es no negativa y continua se infiere (véase la propiedad 9 de la integral en el punto 28.1) que $f(x) \equiv 0$ en $[a, b]$.

Un espacio de funciones continuas en el segmento $[a, b]$ *provisto de la norma* (57.15) *se denota mediante* $CL_p[a, b]$.

De un modo semejante se construyen los espacios análogos para los intervalos no acotados, como también para las funciones de varias variables.

Si un mismo conjunto pertenece a diferentes espacios lineales seminormalizados o normalizados (por ejemplo, los espacios $C[a, b]$ y $CL_p[a, b]$ se componen de unas mismas funciones), entonces resulta útil con frecuencia estimar una norma (una seminorma) de estos elementos en términos de la otra. Los teoremas que expresan las estimaciones de esta índole se denominan *teoremas de encaje*.

Expliquemos lo dicho con un ejemplo enunciado en forma de un lema.

Lema 3. *Sea* $-\infty < a < b < +\infty$, $1 < p < +\infty$. *Si* $f \in RL_p[a, b]$, *se tiene*

$$\|f\|_1 \leqslant (b - a)^{1/q} \|f\|_p, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{57.16}$$

y si $f \in RL_p[a, b] \cap S[a, b]$, *entonces*

$$\|f\|_p \leqslant (b - a)^{1/p} \|f\|_\infty. \tag{57.17}$$

DEMOSTRACIÓN. Teniendo presente que la seminorma $\|f\|_p$ se determina según la fórmula (57.15), obtenemos, haciendo uso de la desigualdad de Hölder (véase el p. 28.4*):

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \cdot 1\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p} \left[\int_a^b dx\right]^{1/q} = (b - a)^{1/q} \|f\|_p, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

con lo cual queda demostrada (57.16). La desigualdad (57.17) también se deduce directamente de las definiciones (57.14) y (57.15) de las normas correspondientes:

$$\|f\|_p = \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p} \leqslant \left\{\int_a^b \left[\sup_{[a, b]} |f(t)|\right]^p dt\right\}^{1/p} = \|f\|_\infty \left(\int_a^b dt\right)^{1/p} =$$

$$= (b - a)^{1/p} \|f\|_\infty. \quad \square$$

Ejercicio 15. Denotemos con $C^1L_2[a, b]$ un subconjunto del espacio $CL_2[a, b]$, compuesto de las funciones continuamente derivables en el segmento $[a, b]$. Demuéstrese que

1) $C^1L_2[a, b]$ es un espacio lineal normalizado, si como norma de la función $f \in C^1L_2[a, b]$ se entiende su norma en el espacio $CL_2[a, b]$;

2) el operador de derivación D es un operador lineal no acotado $D: C^1L_2[a, b] \to CL_2[a, b]$.

Indicación: conviene examinar las funciones $\operatorname{sen} nx \in C^1L_2[-\pi, \pi]$.

57.5. PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS SEMINORMALIZADOS

En los espacios seminormalizados se puede introducir el concepto de sucesión convergente y el de su límite.

Definición 25. *Si la sucesión de elementos $\{x_n\}$ de un espacio lineal seminormalizado (en particular, normalizado) X es de tal género que existe un elemento $x \in X$ tal que $\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$, entonces la sucesión $\{x_n\}$ se llama convergente en la seminorma (norma, respectivamente) hacia el elemento x y en este caso se escribe $x = \lim_{n \to \infty} x_n$.*

Introduciendo, en algún espacio lineal de funciones, diferentes seminormas (en particular, normas), obtendremos diferentes conceptos de convergencia de las sucesiones de funciones. Por ejemplo, la convergencia en el sentido de la norma (57.14) significa una convergencia uniforme; la convergencia en el sentido de la seminorma (57.15) ya es una convergencia de otro género; se denomina *convergencia en media* o, más detalladamente, en el sentido de p-media (a veces se habla simplemente de la convergencia en el sentido del espacio L_p). Ya nos encontramos con el caso particular de la convergencia de este género: para $p = 1$ (véanse el lema 2 en el p. 55.2, el corolario del lema 4 en el p. 56.7 y la métrica (57.2)), y para $p = 2$ (véase el corolario del teorema 12 del p. 55.9). Para $p = 2$ la convergencia en media se denomina también convergencia en el *sentido de la media cuadrática.*

Las desigualdades (57.16) y (57.17) entre diferentes seminormas de las funciones permiten establecer la relación entre diferentes tipos de convergencia de las sucesiones de funciones.

Por ejemplo, supongamos que la sucesión de funciones f_n, $n = 1, 2, \ldots$ y la función f son de tal género que

1°. La sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en el segmento $[a, b]$ hacia la función f.

2°. Para todo $n = 1, 2, \ldots : f_n - f \in S[a, b] \cap RL_p[a, b]$.

Entonces la sucesión $\{f_n\}$ converge a la función f en el segmento $[a, b]$ también en el sentido de p-media, $1 \leqslant p < +\infty$.

En efecto, en virtud de (57.17), se verifica la desigualdad

$$\|f_n - f\|_p \leqslant (b - a)^{1/p} \|f_n - f\|_\infty .$$

La convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n\}$ a la función f en el segmento $[a, b]$ significa que

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Por consigüiente

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Ejercicio 16*. Constrúyase un ejemplo de sucesión de funciones continuas no negativas en un segmento que sea convergente en media, pero que no converja en ninguno de los puntos.

Cabe prestar atención en que en un espacio seminormalizado el límite para la sucesión convergente no es, en el caso general, único. Además, si $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ y $\lim_{n \to \infty} x_n = b$, entonces la seminorma de la diferencia de dos límites es nula: $\|a - b\| = 0$. Esto se deduce inmediatamente de la desigualdad

$$\|a - b\| \leqslant \|a - x_n\| + \|x_n - b\|.$$

Lema 4. *Para cualesquiera dos elementos x e y de un espacio lineal seminormalizado X se verifica la desigualdad*

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|. \tag{57.18}$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|,$$

se tiene

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|$$

y, análogamente,

$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|x - y\|.$$

De las dos últimas desigualdades proviene la desigualdad (57.18). □

Definición 26. *Sea X un espacio lineal seminormalizado (en particular, normalizado). Un conjunto $E \subset X$ se denomina acotado, o, más detalladamente, acotado en seminorma (en norma, respectivamente), si existe una constante $M > 0$ tal que para todo $x \in E$ se verifica la desigualdad $\|x\| \leqslant M$.*

Lema 5. *Si la sucesión $\{x_n\}$ converge en seminorma en X, es acotada.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x = \lim_{n \to \infty} x_n$; ya que la sucesión es convergente, existe tal n_0 que si $n \geqslant n_0$, entonces $\|x_n - x\| \leqslant 1$, y, por lo tanto

$$\|x_n\| = \|(x_n - x) + x\| \leqslant \|x_n - x\| + \|x\| \leqslant \|x\| + 1.$$

Pongamos $M = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_{n_0 - 1}\|, \|x\| + 1\}$; en este caso, evidentemente, para todo $n = 1, 2, \ldots$ se verifica la desigualdad $\|x_n\| \leqslant M$. □

En un espacio lineal provisto de seminorma puede definirse el concepto de función continua. En lo que sigue (véase el p. 57.9) nos hará falta el concepto de continuidad de la función de una y dos variables en un espacio seminormalizado. Definamos estos conceptos.

Sea X un espacio seminormalizado. Una función f, real o compleja, definida en X, se llama *continua en el punto* $x_0 \in X$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe tal $\delta > 0$ que para todos los $x \in X$, que satisfagan la condición $\|x - x_0\| < \delta$, se verifica la desigualdad

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Sea Y también un espacio seminormalizado. Una función f, real o compleja, definida en el producto $X \times Y$, se denomina *continua en el punto* $(x_0, y_0) \in X \times Y$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe tal $\delta > 0$ que para cualesquiera $(x, y) \in X \times Y$, que satisfagan las desigualdades $\|x - x_0\| < \delta$, $\|y - y_0\| < \delta$, se verifica la desigualdad

$$|f(x, y) - f(x_0 y_0)| < \varepsilon.$$

Si la función f es continua en todo punto de cierto conjunto, se llama *continua* en dicho conjunto.

Por supuesto, la definición de continuidad para los espacios seminormalizados puede enunciarse también con ayuda de sucesiones de los elementos del espacio.

Por ejemplo, una función numérica f, definida en el espacio seminormalizado X, se denomina continua en el punto x_0, si para toda sucesión $\{x_n\}$, que converge hacia x_0 en la seminorma del espacio X: $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n - x_0\| = 0$ se verifica la igualdad $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

La equivalencia de las dos definiciones, enunciadas arriba, del límite de una función se demuestra según el mismo esquema que se ha usado en el caso en que X representaba un conjunto de números reales (véase el p. 5.7).

Lema 6. *La seminorma* $\|x\|$ *es una función continua en el espacio seminormalizado* X.

DEMOSTRACIÓN. Sean dados un elemento $x_0 \in X$ y un número $\varepsilon > 0$. En virtud del lema 4, para todos los x tales que $\|x - x_0\| < \varepsilon$, tenemos $|\|x\| - \|x_0\|| < \|x - x_0\| < \varepsilon$, es decir, la condición de continuidad de la función en X se cumple con la elección de $\delta = \varepsilon$. □

Definición 27. *Sean* X *e* Y *los espacios lineales seminormalizados* (*en particular, normalizados*). *Se denomina aplicación isomorfa o isomorfismo de los espacios seminormalizados* (*normalizados*) X *e* Y *una aplicación* f *que aplica de modo isomorfo el espacio* X, *en su calidad de espacio lineal, sobre el espacio* Y (*véase la definición* 19) *y que es de tal género que para cualquier* $x \in X$ *se verifica la igualdad*

$$\|x\|_X = \|f(x)\|_Y.$$

Si para los espacios lineales seminormalizados (*normalizados*) X *e* Y *existe una aplicación isomorfa de* X *sobre* Y, *dichos espacios se denominan isomorfos.*

Dos espacios isomorfos seminormalizados (normalizados) pueden diferir uno del otro sólo en la naturaleza de sus elementos y no en las propiedades del espacio. Por ello, en lo que sigue no vamos a distinguir a menudo los espacios isomorfos seminormalizados (normalizados) compuestos de diferentes elementos: tales espacios pueden "identificarse".

Expliquemos esto con detalles. Sean X e Y los espacios lineales seminormalizados, $Y \subset Y^*$, y sea $f: X \to Y$ una aplicación isomorfa. Consideraremos un conjunto

$X^* = X \cup (Y^* \setminus Y)$ que se obtiene del espacio X por adición a éste del conjunto $Y^* \setminus Y$. De este modo, $X^* \setminus X = Y^* \setminus Y$. Definamos para los elementos del conjunto X^* las operaciones de adición y multiplicación por un número y, además, la norma: se acompañarán ellas de índice X^*. Introduzcamos, con los fines de comodidad, la aplicación $F: X^* \to Y^*$, definida por la fórmula

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in X, \\ x & \text{si } x \in X^* \setminus X. \end{cases} \tag{57.19}$$

Está claro que F es una aplicación biunívoca (biyección) del conjunto X^* sobre el Y^*.

Ahora, para cualesquiera $x \in X^*$, $y \in X^*$ y cualesquiera números λ, μ pongamos

$$(\lambda x + \mu y)_{X^*} \overset{\text{def}}{=} F^{-1}[\lambda F(x) + \mu F(y)],$$

$$\|x\|_{X^*} \overset{\text{def}}{=} \|F(x)\|.$$

El espacio X^*, definido de este modo, es lineal, seminormalizado (normalizado), isomorfo al espacio Y^* y contiene X en calidad de su subconjunto. Cuando decimos "identifiquemos en el espacio Y^* el conjunto Y con el espacio X isomorfo a Y", entendemos precisamente la consideración del espacio X^* mencionado anteriormente (compárese con la identificación de los espacios métricos isométricos en el p. 57.1).

Ejercicios. 17. Sea X un espacio lineal seminormalizado. Los elementos $x \in X$ e $y \in X$ se denominan *equivalentes*, si $\|x - y\| = 0$. Denotemos por $\tilde{X}$ un conjunto cuyos elementos son las clases de elementos equivalentes del espacio X. Sean $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\tilde{y} \in \tilde{X}$, $x \in \tilde{x}$, $y \in \tilde{y}$, λ, un número cualquiera. Definamos $\tilde{x} + \tilde{y}$ como elemento de $\tilde{X}$ que contiene $x + y$, y $\lambda\tilde{x}$, como un elemento de $\tilde{X}$ que contiene λx. Pongamos $\|\tilde{x}\|_{\tilde{X}} = \|x\|_X$. Demuéstrese que las definiciones dadas son correctas, es decir, no dependen de la elección de los elementos $x \in \tilde{x}$ e $y \in \tilde{y}$, y que $\tilde{X}$ es un espacio lineal normalizado provisto de la norma $\|\tilde{x}\|_{\tilde{X}}$.

18. Demuéstrese que las funciones $x + y$ e λx son continuas en todo espacio lineal seminormalizado X (x e y son los elementos de este espacio y λ es un número), en otras palabras, que las operaciones de adición y multiplicación por un número son continuas en el espacio mencionado.

57.6. PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS NORMALIZADOS

En el espacio lineal *normalizado* X puede introducirse, de modo natural, la distancia entre los elementos de dicho espacio. A saber, resulta válida la siguiente afirmación.

Lema 7. *El espacio lineal normalizado* X *es un espacio métrico provisto de la métrica*

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \tag{57.20}$$

con la particularidad de que la convergencia de las sucesiones en el espacio X *en dicha métrica coincide con la convergencia en la norma.*

DEMOSTRACIÓN. La función $\rho(x, y)$, definida según la fórmula (57.20), es realmente una distancia: las propiedades de la distancia (véase el p. 57.1) se deducen de las propiedades de la norma 1° – 4° (compruébese). La segunda afirmación del lema es obvia. □

Diremos que la *métrica* (57.20) *se engendra por la norma dada del espacio X.* Por ejemplo, una métrica engendrada por la norma $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ en un espacio lineal aritmético de los vectores reales n-dimensionales $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es la métrica del espacio euclídeo R^n definida mediante la fórmula (18.1).

Una sucesión de puntos del espacio X, fundamental respecto de la métrica (57.20), se llama *fundamental respecto de la norma* dada en el espacio X.

Ejercicio 19. Demuéstrese que un conjunto en el espacio lineal normalizado está acotado en norma (véase la definición 26 en el p. 57.5) cuando, y sólo cuando, está acotado como conjunto de un espacio métrico en el sentido de la métrica (57.20) (véase el ejercicio 1 en el p. 57.1).

Ejemplo. Examinemos el espacio l_p de sucesiones de números reales con la norma (57.10). Designemos mediante $\{e_n\}$ una sucesión cuyo n-ésimo término es igual a la unidad, mientras que todos los términos restantes son nulos. Es evidente que para $n \neq m$

$$\|e_n - e_m\| = (1 + 1)^{1/p} = 2^{1/p}.$$

Por eso la sucesión de elementos e_n, $n = 1, 2, \ldots$, del espacio l_p no puede contener una subsucesión fundamental ni tampoco, por consiguiente, una que sea convergente.

La sucesión $\{e_n\}$ está acotada, pues para todo n tenemos $\|e_n\| = 1$. Forma un conjunto cerrado en l_p, puesto que el conjunto $\{e_n\}$ no tiene puntos límites en l_p (de lo contrario, en la sucesión se encontraría una subsucesión convergente).

De este modo, en un espacio de dimensión finita existen sucesiones acotadas, de las cuales no se puede separar una que sea convergente. Existen también conjuntos cerrados acotados en los cuales no toda sucesión de sus puntos permite que de ella sea separada una convergente.

OBSERVACIÓN 1. Si en el espacio lineal X están definidas dos normas de elementos $\|\cdot\|^{(1)}$ y $\|\cdot\|^{(2)}$ y estas normas son equivalentes (véase la definición 23 en el p. 57.4), entonces la sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, converge hacia el elemento $x \in X$ en el sentido de la norma $\|\cdot\|^{(1)}$ cuando, y sólo cuando, converge a x en el sentido de la norma $\|\cdot\|^{(2)}$.

En efecto, en vista de que las normas $\|\cdot\|^{(1)}$ y $\|\cdot\|^{(2)}$ son equivalentes, existen unas constantes $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$ tales que se verifican las desigualdades

$$c_1\|x_n - x\|^{(2)} \leqslant \|x_n - x\|^{(1)} \leqslant c_2\|x_n - x\|^{(2)}.$$

De estas desigualdades deriva directamente la equivalencia de las convergencias de la sucesión $\{x_n\}$ hacia x en el sentido de las normas $\|\cdot\|^{(1)}$ y $\|\cdot\|^{(2)}$.

De la equivalencia, demostrada en el teorema 2 del p. 57.4, de todas las normas en un espacio de dimensión finita se infiere que las convergencias de las sucesiones de sus puntos en todas las normas son equivalentes. Por cuanto la convergencia en norma cuadrática $\|x\|_2$ es equivalente a la convergencia en coordenadas (véanse los pp. 18.1 y 18.4), la convergencia de la sucesión de puntos en un espacio de dimensión finita en cualquier norma es equivalente a la convergencia de las sucesiones numéricas de las coordenadas de los puntos en consideración respecto de una base arbitraria.

OBSERVACIÓN 2. Observemos que en el caso cuando una seminorma no es norma, incluso una función simple como la lineal, en un espacio seminormalizado lineal de dimensión finita puede resultar no continua. Consideremos, por ejemplo, un espacio aritmético bilineal X de los vectores $x = (x_1, x_2)$ con la seminorma $\|x\| = \|x_1\|$. Es realmente una seminorma, puesto que $\|x\| = |x_1| \geqslant 0$. Además, para cualquier número λ se tiene $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2)$, por lo cual $\|\lambda x\| = |\lambda x_1| = |\lambda|\,|x_1| = |\lambda|\,\|x\|$. Por fin, si $y = (y_1, y_2)$ es también un elemento de X, entonces $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, por consiguiente, $\|x + y\| = |x_1 + y_1| \leqslant |x_1| + |y_1| = \|x\| + \|y\|$. De este modo, todas las propiedades de la seminorma están cumplidas.

Mostremos que la función lineal $f(x) = x_2$ no es continua en X. En efecto, para la sucesión $x^{(n)} = (1/n, 1)$ cualquier punto del tipo $x = (0, x_2)$ (x_2 es arbitrario) es el límite para dicha sucesión en el sentido de la seminorma en consideración:

$$\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)} - x\| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

En particular, el punto $O = (0, 0)$ es el límite de la sucesión $\{x^{(n)}\}$. Sin embargo,

$$\lim_{n\to\infty} f(x^{(n)}) = 1 \neq 0 = f(O).$$

Esto es indicio de que la función $f(x) = x_2$ no es continua en la seminorma $\|x\| = |x_1|$,

Subrayemos, no obstante, que si en un espacio de dimensión finita la seminorma es una norma, entonces toda función lineal será continua respecto de esta norma. Efectivamente, sea X un espacio lineal normalizado n-dimensional y sea f una funcional lineal en X. Supongamos que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base en X y, por consiguiente, todo elemento $x \in X$ es representable, y además, de manera unívoca, en la forma $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$. Por cuanto f es una funcional lineal, se tiene

$$f(x) = f(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + \ldots + x_nf(e_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n,$$

donde $a_k = f(e_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ son los números fijos para f. Recordando que la convergencia de una sucesión de puntos en cualquier norma en un espacio de dimensión finita es equivalente a la convergencia de dicha sucesión en coordenadas, nos convencemos en seguida de que la continuidad de la función f deriva realmente de la fórmula obtenida $f(x) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$.

Lema 8. *La norma es una función continua en un espacio lineal normalizado en el sentido de la métrica* (57.20).

En virtud de la igualdad (57.20), esta afirmación se deduce de lo que una seminorma es continua respecto de otra seminorma (véase el lema 6 en el p. 57.5).

Definición 28. *Un espacio lineal normalizado se denomina completo, si es espacio métrico completo en el sentido de la métrica engendrada por la norma de dicho espacio.*

*Todo espacio lineal normalizado completo se llama espacio de Banach**).

---

*) S. Banach (1892 — 1945), matemático polaco.

El espacio lineal normalizado $C[a, b]$ de funciones continuas en el segmento $[a, b]$ dotado de la norma (57.14) es un espacio de Banach. Nos hemos convencido de esto en el p. 57.1, al considerar un espacio métrico de funciones continuas en el segmento $[a, b]$ con la distancia (57.1) la que se engendra precisamente por la norma (57.14). Hemos visto que la completitud del espacio $C[a, b]$ se desprende de lo que la convergencia de la sucesión en este espacio significa la convergencia uniforme de la misma en el segmento $[a, b]$.

Teorema 3. *Todo espacio lineal normalizado está contenido, y además, es denso en cierto espacio de Banach.*

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo con el teorema 1 en el p. 57.1, es suficiente mostrar que a la completación X^* de un espacio lineal normalizado X (considerado como un espacio métrico provisto de la métrica (57.20)) pueden ser prolongadas desde X las operaciones algebraicas y la norma. Es posible hacerlo con ayuda del paso al límite. Al igual que en la demostración del teorema 1, convengamos en considerar que $X \subset X^*$, en otras palabras, identifiquemos el espacio X con un subespacio, isométrico a éste, de la completación X^* construida en X.

Sea, por ejemplo, $x \in X^*$ e $y \in X^*$. Siendo X denso, existen en X^* las sucesiones $x_n \in X$ e $y_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, tales que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

Probemos que la sucesión $\{x_n + y_n\}$ converge. En efecto,

$$\rho(x_n + y_n, x_m + y_m) = \|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| = \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m).$$

De la convergencia de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ se desprende que ellas son fundamentales, por lo cual la sucesión $\{x_n + y_n\}$ es también fundamental y, por lo tanto, siendo X^* completo, convergente.

Pongamos, por definición,

$$x + y = \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n).$$

Análogamente se determina también, pasando al límite, λx, $x \in X^*$.

Es fácil comprobar que las operaciones algebraicas $x + y$, λx, definidas de esta forma para los elementos de la completación X^*, no dependen de cómo se eligen las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tales que $x_n \to x$, $y_n \to y$, $x_n \in X$, $y_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$. Tampoco es difícil convencerse de que en el caso cuando los elementos pertenezcan al espacio de partida X, las operaciones algebraicas, definidas por nosotros, coinciden con las dadas.

Determinemos ahora la norma para $x \in X^*$. Sea $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Mostremos que la sucesión numérica $\{\|x_n\|\}$ es fundamental. En efecto, de la desigualdad (57.18) tenemos, para cualesquiera n y m naturales:

$$|\|x_n\| - \|x_m\|| \leqslant \|x_n - x_m\| = \rho(x_n, x_m). \tag{57.21}$$

La sucesión $\{x_n\}$, siendo convergente, es, además, fundamental, por lo cual de la desigualdad (57.21) se deduce que la sucesión numérica $\{\|x_n\|\}$ es también fundamental y, por lo tanto, convergente.

Pongamos, por definición,

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

La norma $\|x\|$, $x \in X^*$, definida de esta manera, no depende de cómo se elige la sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, tal que $x_n \to x$. Es fácil comprobar también, pasando al límite, que para la función $\|x\|$, $x \in X^*$, se cumplen las propiedades de la norma 1° – 4° y que para $x \in X$ obtenemos la norma anterior. □

A título de ejemplo indiquemos el espacio lineal normalizado $CL_p[a, b]$ de funciones continuas en el segmento $[a, b]$ provisto de la norma (57.15). Cuando $p = 1$, esta norma engendra la métrica (57.2). Se puede mostrar que un espacio métrico de funciones continuas provisto de la métrica (57.2) no es completo. De acuerdo con el teorema demostrado, dicho espacio lineal normalizado de funciones continuas en el segmento $[a, b]$ puede ser completado hasta que se obtenga un espacio completo. Este espacio de Banach se designa mediante $L[a, b]$.

Definición 29. *Un sistema de elementos x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ es cierto conjunto de índices), del espacio lineal seminormalizado X se denomina completo en dicho espacio, si para todo elemento $x \in X$ y cada número $\varepsilon > 0$ existen tales elementos $x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}$ del sistema dado y tales números $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ que se verifica la desigualdad*

$$\|x - (\lambda_1 x_{\alpha_1} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n})\| < \varepsilon. \tag{57.22}$$

Enunciemos esta definición en una forma algo diferente, introduciendo previamente una noción más.

Definición 30. *Un conjunto $A \subset X$ se llama denso en el espacio seminormalizado X, si para todo elemento $x \in X$ y todo $\varepsilon > 0$ se encontrará tal elemento $a \in A$ se verifique*

$$\|x - a\| < \varepsilon.$$

Si X es un espacio normalizado y, por lo tanto, métrico, entonces, en virtud de (57.20), la definición 30 conduce a la misma noción de densidad de un conjunto que la definición 6 del p. 57.1. Ahora podemos decir:

Un sistema $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, es completo en el espacio X, si el conjunto de todas las combinaciones lineales de sus elementos, es decir, su cápsula lineal (véase la definición 15 en el p. 57.2) *forma un conjunto denso en X.*

Si X es un espacio normalizado, tiene sentido en él, como en cualquier otro espacio métrico, el concepto de clausura de un conjunto, y por cuanto la densidad de cierto conjunto en un espacio métrico significa que la clausura del conjunto citado coincide con el mismo espacio (véase la definición 6 en el p. 57.1), entonces la definición 30 en este caso puede parafrasearse del modo siguiente:

un sistema de elementos x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ es cierto conjunto de índices), del espacio lineal normalizado X se llama completo, si la clausura de su cápsula lineal (véase el p. 57.2) *coincide con todo el espacio X.*

Con el caso particular del concepto de completitud para un sistema de funciones ya nos hemos encontrado en el p. 55.8.

Definición 31. *Si en el espacio lineal normalizado X existe un conjunto numerable de elementos que forma un sistema completo del espacio X, este último se denomina separable.*

En conclusión de este punto introduzcamos el concepto de base, y, ante todo, el de serie en el espacio X.

Definición 32. *Sea* x_n, $n = 1, 2, \ldots$, *una sucesión de elementos del espacio lineal normalizado* X. *Pongamos* $s_n = x_1 + \ldots + x_n$, $n = 1, 2, \ldots$; *un par de sucesiones* $\{x_n\}$, $\{s_n\}$ *se llama serie (con el término general* x_n*) y se designa*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n; \tag{57.23}$$

los elementos s_n *se denominan n-ésimas sumas parciales de la serie* (57.23).

Si la sucesión s_n, $n = 1, 2, \ldots$, converge en el espacio X, la serie (57.23) se llama *convergente*. En este caso el límite $s = \lim_{n \to \infty} s_n$ de la sucesión s_n, $n = 1, 2, \ldots$, se llama *suma de la serie* (57.23) y se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s.$$

De este modo, al igual que en el caso de las series numéricas, el mismo símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ se empleará para designar tanto la propia serie, como también su suma, si la serie converge.

Lo mismo que para las series numéricas, para las series en los espacios lineales normalizados subsisten las siguientes afirmaciones.

Si la serie (57.23) *converge, converge también la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda x_n$, *con la particularidad de que si* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s$, *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda x_n = \lambda s$.

Si en el espacio X convergen dos series, converge también una serie cuyo término es igual a la suma de sus términos generales y la suma de esta última serie es igual a la suma de las sumas de las series dadas.

Definición 33. *La sucesión de elementos* e_n, $n = 1, 2, \ldots$ *de un espacio lineal normalizado se llama base, si, cualquiera que sea el elemento* x, *existe una sucesión, y sólo una, de los números* λ_n, $n = 1, 2, \ldots$, *tal que*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n. \tag{57.24}$$

De este modo, si la sucesión $\{e_n\}$ es una base del espacio X, para todo elemento $x \in X$ existe una, y sólo una, sucesión de los números $\{\lambda_n\}$ tal que para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene tal número n_ε que para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ se verifica la desigualdad

$$\|x - (\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n)\| < \varepsilon. \tag{57.25}$$

La fórmula (57.24) se denomina desarrollo del elemento x según la base $\{e_n\}$.

No es difícil convencerse de que si el sistema de elementos $\{e_n\}$ forma una base, es linealmente independiente. Esto proviene en seguida de la unicidad del desarrollo de los elementos del espacio según la base. En efecto, si los elementos e_n, $n = 1, 2, \ldots$, resultaran ser linealmente dependientes, se encontraría entre ellos un conjunto finito de tales $e_{n_1}, \ldots, e_{n_k}$, que para ciertos números $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, no todos iguales a cero, tendría lugar la igualdad $\lambda_1 e_{n_1} + \ldots + \lambda_k e_{n_k} = 0$, es decir, se obtendría un desarrollo del cero según los elementos de la base con coeficientes que no son todos nulos. Por cuanto para el cero se tiene un desarrollo trivial $0 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 e_n$, queda con esto perturbada la condición de unicidad del desarrollo de los elementos según la base.

Si un espacio lineal normalizado dispone de una base compuesta por un conjunto finito o numerable de elementos, este espacio es separable. En efecto, no es difícil comprobar que el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de las bases citadas con coeficientes racionales es numerable y denso en todo el espacio.

OBSERVACIÓN. Recalquemos la diferencia que existe entre la sucesión de elementos que forman un sistema completo y la sucesión de elementos que forman una base. En el primer caso los coeficientes λ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, en la desigualdad (57.22) dependen, en el caso general, no sólo de la elección del elemento $x \in X$, sino también de la elección del número ε. Por el contrario, en el segundo caso los coeficientes λ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, en la desigualdad (57.25) se determinan sólo por el mismo elemento (se llaman *coeficientes del desarrollo del elemento x según la base dada*, o bien *coordenadas del elemento x para la base dada*) y es sólo su cantidad, es decir, el número n_ε, el que depende de la elección de ε.

Existen espacios de Banach separables en los que no hay base. En el punto que sigue será considerada una clase más estrecha de los espacios, donde la base siempre existe.

57.7. ESPACIOS LINEALES PROVISTOS DE PRODUCTO ESCALAR

Definición 34. *Una función real, definida en el conjunto de los pares ordenados de elementos de un espacio lineal real y denotada por* (x, y), $x \in X$, $y \in X$, *se llama multiplicación escalar, si satisface las siguientes condiciones:*

1°) $(x, y) = (y, x)$, $x \in X$, $y \in X$;

2°) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$, $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$, λ *y* μ *son unos números reales;*

3°) $(x, x) \geqslant 0$, $x \in X$;

4°) *si* $(x, x) = 0$, *entonces* $x = 0$.

Observemos que de la propiedad 2° se desprende que para todo $x \in X$ se verifica la igualdad

$$(x, 0) = 0.$$

En efecto, $(x, 0) = (x, 0 \cdot 0) = 0(x, 0) = 0$.

Definición 35. *Una función real* (x, y), *definida en el conjunto de los pares ordenados de un espacio lineal real* X, $x \in X$, $y \in X$, *y que satisface sólo las condiciones* 1°, 2°, 3°, *se llama multiplicación semiescalar.*

De un modo análogo se introduce también el concepto de multiplicación semiescalar (en particular, escalar) en el espacio lineal complejo $\boldsymbol{R}$. En este caso la función

de valores complejos (x, y) lleva el nombre de multiplicación semiescalar (escalar, respectivamente), si satisface la propiedad 2° para cualesquiera números complejos λ y μ, la propiedad 3° y la propiedad

$$1'°)\ (x, y) = \overline{(y, x)}, \quad x \in X, \quad y \in X,$$

donde, como siempre, la raya por encima del número significa un número complejo conjugado de él.

En adelante, por espacio lineal se entenderá un espacio lineal real, si no se especifica alguna otra cosa.

El resultado de una multiplicación escalar (semiescalar) de dos elementos $x \in X$ e $y \in Y$ se denomina *producto escalar* (*semiescalar*) (x, y). Los espacios lineales, para cuyos elementos está definida la operación de multiplicación escalar (semiescalar), se llaman *espacios lineales provistos de producto escalar* (*semiescalar*).

Lema 9. *Para cualquier par de vectores x e y de un espacio lineal X provisto de producto semiescalar se verifica la desigualdad*

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y), \tag{57.26}$$

llamada desigualdad de Cauchy — Schwartz.

DEMOSTRACIÓN. Para todo número real λ, en virtud de la propiedad 3° de la multiplicación semiescalar, se tiene

$$(\lambda x + y, \lambda x + y) \geqslant 0.$$

Al aplicar las propiedades 1° y 2° de la multiplicación semiescalar, obtendremos:

$$\lambda^2(x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y) \geqslant 0.$$

Si $(x, x) = 0$, entonces $2\lambda(x, y) + (y, y) \geqslant 0$. Por cuanto esto es cierto para cualquier λ real, $(x, y) = 0$, y, por consiguiente, la desigualdad (57.26) es lícita: sus ambos miembros se reducen a cero. En cambio, si $(x, x) \neq 0$, entonces el discriminante del trinomio obtenido, cuadrático respecto de λ, es no positivo:

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leqslant 0,$$

lo que es equivalente a la condición (55.26).

Corolario. *Para cualquier par de vectores de un espacio lineal provisto de producto semiescalar se verifica la desigualdad*

$$\sqrt{(x + y, x + y)} \leqslant \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}, \quad x \in X, \quad y \in X.$$

En efecto, al aplicar la desigualdad de Cauchy — Schwartz, obtendremos:

$$(x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leqslant$$
$$\leqslant (x, x) + 2\sqrt{(x, x)(y, y)} + (y, y) = [\sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}]^2. \ \square$$

Ejercicio 20. Demuéstrese que en el espacio lineal complejo X provisto de producto semiescalar se verifica la desigualdad

$$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y), \quad x \in X, \quad y \in X.$$

Si en un espacio lineal X provisto de producto semiescalar se pone

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \quad x \in X, \tag{57.27}$$

entonces la función $\|x\|$ satisface las propiedades 1° — 3° de la seminorma. La propiedad 1° de la seminorma proviene de la propiedad 3°, de la multiplicación semiescalar, la propiedad 2°, de la propiedad 2° y la propiedad 3° de la seminorma, del corolario del lema 9.

Cuando la multiplicación semiescalar es escalar, la seminorma (57.27) es una norma. En efecto, la propiedad 4° de la norma deriva de la propiedad 4° de la multiplicación escalar. De este modo, se ha demostrado la siguiente afirmación.

Lema 10. *Todo espacio lineal provisto de producto escalar (semiescalar, respectivamente) es un espacio normalizado (seminormalizado, respectivamente) con una norma (seminorma, respectivamente) determinada por la fórmula* (57.27) *y, por consiguiente, un espacio métrico con la métrica* (57.20).

La seminorma (57.27) se llamará *seminorma* (*norma*, respectivamente) *engendrada por el producto semiescalar* (*escalar*) *dado*. La distancia (57.20), engendrada por la norma (57.27) de un espacio lineal dotado de producto escalar, se llamará también *distancia engendrada por el producto escalar dado*.

Al aplicar la designación de la seminorma, podemos escribir la desigualdad (57.26) en la forma

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|. \tag{57.28}$$

57.8. EJEMPLOS DE ESPACIOS LINEALES PROVISTOS DE PRODUCTO ESCALAR

1. En el conjunto de números reales $\boldsymbol{R}$ una operación ordinaria de multiplicación es también multiplicación escalar en el sentido de la definición 34.

En el conjunto de números complejos $\boldsymbol{C}$ *el producto escalar* de los números x e y está representado por el producto $x\bar{y}$.

2. El espacio vectorial real aritmético n-dimensional R^n, donde el producto escalar de los vectores $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ e $y = (y_1, \ldots, y_n) \in R^n$ se determina según la fórmula (véase (18.32) en el p. 18.4)

$$(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n,$$

es un espacio lineal provisto de producto escalar en el sentido de la definición 34 del p. 57.7. En este caso la norma del elemento $x \in R^n$ coincide con su longitud $|x|$ (véase el p. 57.4, ejemplo 2):

$$\|x\| = |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2},$$

y la métrica correspondiente, con la distancia en el espacio puntual aritmético n-dimensional:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Recordemos que para este espacio la desigualdad de Cauchy — Schwartz ha sido demostrada antes (véanse el lema 1 en el p. 18.1 y la desigualdad (18.39) en el p. 18.4).

En el espacio complejo aritmético C^n (véase el p. 57.2) el producto escalar se introduce por medio de la fórmula

$$(x, y) = x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n, x = (x_1, \ldots, x_n) \in C^n, \quad y = (y_1, \ldots, y_n) \in C^n.$$

3. Analicemos el espacio lineal seminormalizado $RL_2[a, b]$ (del ejemplo 8, el p. 57.4), compuesto de las funciones de cuadrado integrable (por regla general, en el sentido impropio) en el segmento $[a, b]$, es decir, de tales funciones f, para las cuales

$$\int_a^b f^2(t)dt < +\infty.$$

Sea $f \in RL_2[a, b]$ y $g \in RL_2[a, b]$. Recordemos que el producto de las funciones que son integrables según Riemann en cierto segmento es también integrable según Riemann en dicho segmento. Por eso, en cualquier segmento $[\xi, \eta] \subset [a, b]$ que no contiene puntos singulares de las funciones f y g (véase el p. 55.1), el producto fg es también integrable según Riemann y, por lo tanto, hay sentido en considerar la integral impropia

$$\int_a^b f(t)g(t)dt. \tag{57.29}$$

Por cuanto, además, en cualquier punto x, que no sea singular para las funciones f y g, es válida la desigualdad

$$|f(t)g(t)| \leqslant \frac{f^2(t) + g^2(t)}{2}\text{*)},$$

entonces la integral (57.29) converge y, además, absolutamente.

El producto semiescalar en este espacio se determina por la fórmula

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt. \tag{57.30}$$

Las propiedades 1°, 2°, 3° del producto semiescalar se comprueban con facilidad. El espacio obtenido, provisto de producto semiescalar (57.30), se designará también mediante $RL_2[a, b]$.

Observemos que la desigualdad (57.26) en este caso puede ser escrita en la forma siguiente:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)dt \int_a^b g^2(t)dt;$$

representando en sí un caso particular de la desigualdad de Hölder (véase el p. 28.4*) para $p = q = 2$ y llevando el nombre de desigualdad de Cauchy — Buniakovski**).

---

*) Dicha desigualdad proviene de la siguiente desigualdad evidente: $(|f(t)| - |g(t)|)^2 \geqslant 0$.

**) V. Ya. Buniakovski (1804 — 1889), matemático ruso.

La seminorma engendrada por el producto semiescalar (57.30) tiene, evidentemente, la forma

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}, \tag{57.31}$$

es decir, coincide con la seminorma (57.15) examinada en el ejemplo 8, del p. 57.4, para $p = 2$. De aquí se deduce que el producto semiescalar (57.30) no es escalar, puesto que en el p. 57.4 se ha establecido que la seminorma (57.15) no es una norma, para todo $p \geqslant 1$.

Sin embargo, en el subespacio $CL_2[a, b]$ del espacio $RL_2[a, b]$, que se compone sólo de las funciones continuas en el segmento $[a, b]$, el producto semiescalar (57.30) ya es escalar, pues, según se ha demostrado en el ejemplo 9 del p. 57.4, en este caso

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}, \quad f \in CL_2[a, b]$$

es no sólo una seminorma, sino también una norma.

Para la distancia entre dos funciones continuas f y g en este espacio obtenemos la fórmula

$$\rho(f, g) = \|f - g\| = \left\{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2dx\right\}^{1/2}. \tag{57.32}$$

Ya nos hemos encontrado con la convergencia de las funciones en el sentido de esta métrica: véase, por ejemplo, el corolario del teorema 12 en el p. 55.9.

Todo lo dicho se extiende de modo natural a las funciones definidas en cualquier intervalo infinito, en particular, en todo el eje.

Ejercicio 21. Sea X un espacio lineal provisto de producto semiescalar. Los elementos $x \in X$ e $y \in Y$ se llaman *equivalentes*, si $\|x - y\|^2 = (x - y, x - y) = 0$. Designemos mediante $\tilde{X}$ un conjunto cuyos elementos están constituidos por las clases de elementos equivalentes del espacio X. Sea $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\tilde{y} \in \tilde{X}$, $x \in \tilde{x}$, $y \in \tilde{y}$, sean λ y μ unos números. Definamos $\lambda\tilde{x} + \mu\tilde{y}$ como un elemento del conjunto $\tilde{X}$ que contiene $\lambda x + \mu y$, y pongamos $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, y)$. Demuéstrese que estas definiciones son correctas, es decir, no dependen de la elección de los elementos $x \in \tilde{x}$ *e* $y \in \tilde{y}$, y que $\tilde{X}$ *es un espacio lineal, mientras que* $(\tilde{x}, \tilde{y})$ es el producto escalar en $\tilde{X}$.

57.9. PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS LINEALES PROVISTOS DE PRODUCTO ESCALAR. ESPACIOS DE HILBERT

Un espacio lineal provisto de producto semiescalar es también, de acuerdo con (57.27), seminormalizado. Por eso, para él están definidos el concepto de sucesión convergente, de su límite y el de función continua (véase el p. 57.5).

Lema 11. *El producto semiescalar* (x, y) *es una función continua* (véase el p. 57.5) *de sus argumentos* x *e* y *en el conjunto* $X \times X$, $x \in X$, $y \in X$.

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente, para cualesquiera $x_0 \in X$, $y_0 \in X$, $x \in X$ e $y \in X$ se verifica la desigualdad

$$|(x_0, y_0) - (x, y)| = |(x_0 - x, y_0)| + (x, y_0 - y)| \leqslant$$
$$\leqslant \|x_0 - x\| \|y_0\| + \|x\| \|y - y_0\|, \tag{57.33}$$

de la cual proviene inmediatamente la citada continuidad del producto semiescalar. En efecto, si $x \in U(x_0, \delta)$, $y \in U(y_0, \delta)$, entonces, al observar que $\|x\| \leqslant \|x - x_0\| + \|x_0\| < \|x_0\| + \delta$, de (57.33) obtenemos

$$|(x_0, y_0) - (x, y)| < \delta\|y_0\| + (|x_0| + \delta)\delta.$$

De aquí se infiere que para cualquier $\varepsilon > 0$ fijo siempre podemos elegir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ de modo tal que para $x \in U(x_0, \delta)$, $y \in U(y_0, \delta)$ se verifique la desigualdad $|(x_0, y_0) - (x, y)| < \varepsilon$; para ello basta elegir $\delta > 0$ de tal manera que sea $\delta\|y_0\| + (\|x_0\| + \delta)\,\delta < \varepsilon$, lo que, evidentemente, es siempre posible. □

En el espacio X provisto de producto semiescalar podemos hablar sobre la convergencia de las series en seminorma engendrada por el producto semiescalar: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_n \in X$, $x = 1, 2, \ldots$, se llama *convergente*, si la sucesión de sus sumas parciales $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_n$ converge en la seminorma mencionada hacia cierto elemento $s \in X$, el cual se denomina suma de la serie: $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Indiquemos que la suma de una serie en el espacio provisto de producto semiescalar no está definida unívocamente. No obstante, si $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $s^* = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, es decir, si s y s^* son las sumas de una misma serie, entonces $\|s^* - s\| = 0$ (véase el p. 57.5), por lo cual para cualquier elemento $a \in X$ tiene lugar la igualdad $(s^*, a) = (s, a)$. En efecto, en virtud de la desigualdad de Cauchy — Schwartz, para un producto semiescalar tenemos

$$|(s^*, a) - (s, a)| = |(s^* - s, a)| \leqslant \|s^* - s\|\,\|a\| = 0.$$

De la continuidad del producto semiescalar en todo el espacio se desprende, por ejemplo, que las series en un espacio provisto de producto escalar pueden multiplicarse término a término no sólo por los factores numéricos, sino también por los elementos del mismo espacio. Demostrémoslo.

Lema 12. *Supongamos que en el espacio X provisto de producto semiescalar está dada una serie convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s, \quad x_n \in X, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Entonces para cada elemento $a \in X$ una serie numérica que se obtiene de la dada multiplicándola término a término por a es también convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, a) = (s, a).$$

En otras palabras, para la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y cualquier elemento $a \in X$ se verifica la desigualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, a) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n, a\right).$$

DEMOSTRACIÓN. Por cuanto

$$s = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, a) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k, a) = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k, a\right) = \left(\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} x_k, a\right) = (s, a).$$

Ejemplo. Consideraremos el espacio $RL_2[a, b]$ del ejemplo 3 en el p. 57.8. Supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ de funciones $f_n \in RL_2[a, b]$ converge en este espacio a la función $f \in RL_2[a, b]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = f(t), \quad t \in [a, b],$$

es decir, la sucesión de las sumas parciales

$$s_n(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t)$$

de esta serie converge a la función f en el sentido de la media cuadrática:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b [f(t) - s_n(t)]^2 dt = 0.$$

Entonces, de acuerdo con el lema 12, para toda función $\varphi(x) \in RL_2[a, b]$ tenemos

$$(f, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n, \varphi),$$

es decir,

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\varphi(x)dx.$$

En particular, cuando $\varphi = 1$,

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

En otras palabras,

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Así pues, *si una serie de funciones de cuadrado integrable en el segmento $[a, b]$ converge en éste en el sentido de la media cuadrática hacia cierta función, también*

de cuadrado integrable en $[a, b]$, entonces la serie puede integrarse término a término.

Por cuanto de la convergencia uniforme de una sucesión de funciones continuas se deduce la convergencia de dicha sucesión a la misma función también en el sentido de la media cuadrática (véase el p. 57.4), de la afirmación aquí demostrada proviene que

si la serie de funciones continuas converge en un segmento uniformemente, se puede integrarla término a término.

Este mismo resultado se ha obtenido por otro procedimiento antes, en el capítulo sobre las series (véase el teorema 9 en el p. 36.4).

Definición 36. *Dos espacios lineales X e Y con producto escalar (semiescalar) se llaman isomorfos, si son isomorfos como espacios lineales, y la aplicación f, que aplica el espacio X sobre el espacio Y y realiza este isomorfismo, conserva el producto escalar (producto semiescalar), es decir, para cualesquiera dos elementos $x \in X$ e $y \in X$ se verifica la igualdad*

$$(x, y) = (f(x), f(y)).$$

Dos espacios lineales isomorfos provistos de producto escalar (semiescalar) pueden diferenciarse sólo en la naturaleza de sus elementos y no en las propiedades métricas, razón por la cual en adelante muy a menudo los espacios lineales isomorfos provistos de producto escalar (semiescalar) no se destinguirán.

Aclaremos esto con un ejemplo. Sean X e Y^* unos espacios lineales provistos de producto escalar (semiescalar) y sea f la aplicación isomorfa del espacio X en un conjunto $Y \subset Y^*$. En este caso, "al identificar" los elementos del espacio X con los elementos correspondientes del conjunto Y, podemos considerar el espacio X como un subespacio del espacio Y^*. Se entiende (compárese con las construcciones correspondientes en el p. 57.1 y p. 57.5) el estudio del espacio lineal X^* compuesto de los elementos del espacio X y los del conjunto $Y^* \setminus Y$. Las operaciones de sumación de los elementos y su multiplicación por un número en el espacio X^* se introducen igual que en el p. 57.5 (después de la definición 27), mientras que el producto escalar (semiescalar) $(x, y)_{X^*}$, $x \in X^*$, $y \in X^*$, se determina en el espacio a través del producto escalar (semiescalar) en el espacio Y^* mediante la biyección $F: X^* \to Y^*$, que viene definida por la fórmula (57.19) de la manera siguiente:

$$(x, y)_{X^*} = (F(x), F(y)),$$

donde en el segundo miembro figura el producto escalar (semiescalar) en el espacio Y^*. Es fácil comprobar que el espacio X^* es isomorfo al espacio Y^*.

Ejercicios. 22. Demuéstrese que todos los espacios lineales n-dimensionales provistos de producto escalar son isomorfos entre sí.

22. Demuéstrese que todo espacio lineal n-dimensional provisto de producto escalar es completo en el sentido de la métrica engendrada por el producto escalar.

Definición 37. *Un espacio lineal provisto de producto escalar, completo en el sentido de la métrica engendrada por el producto escalar dado, se llama espacio de Hilbert.* *)

*) D. Hilbert (1862 — 1943), matemático alemán.

Un espacio simplemente lineal provisto de producto escalar lo llaman también *prehilbertiano*. Esta denominación se justifica por el siguiente teorema.

Teorema 4. *Todo espacio prehilbertiano X se contiene y, además, es denso, en cierto espacio de Hilbert X^*.*

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo con los teoremas 1 del p. 57.1 y 3 del p. 57.6, basta mostrar que a la completación X^* del espacio lineal normalizado X puede prolongarse desde X un producto escalar, conservando las propiedades $1° \div 4°$. Esto se puede hacer pasando al límite. En efecto, por cuanto $\bar{X} = X^*$, para cualquier par de puntos $x \in X^*$ e $y \in X^*$ existen las sucesiones de puntos $x_n \in X$, $y_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, de tal género que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Probemos que existe $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n)$. Efectivamente, de la desigualdad (57.33) se infiere que para cualesquiera m y n naturales

$$|(x_m, y_m) - (x_n, y_n)| \leqslant \|x_m - x_n\| \|y_m\| + \|x_n\| \|y_m - y_n\|.$$

Puesto que las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, siendo convergentes, están acotadas en norma y son fundamentales, de la desigualdad mencionada proviene que la sucesión numérica $\{(x_n, y_n)\}$ es también fundamental y, por consiguiente, converge.

Pongamos, por definición, $(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n)$. Es fácil comprobar, pasando al límite, que esta definición no depende de la elección de tales sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ que $x_n \to x$, $y_n \to y$, y que para la función (x, y), definida de este modo se cumplen las propiedades $1° — 4°$ del producto escalar. □

El espacio obtenido de Hilbert se llama *completación del espacio prehilbertiano de partida.*

Como ejemplo de espacio de Hilbert interviene el espacio euclídeo n-dimensional (véase (57.8)). Otros ejemplos serán considerados más abajo.

Ejercicio 23. Demuéstrese que un espacio prehilbertiano, isomorfo al espacio de Hilbert, es un espacio de Hilbert.

57.10. ESPACIO L_2

Recordemos (véase el ejemplo 3 en el p. 57.8) que un espacio lineal de funciones continuas en el segmento $[a, b]$ provisto de producto escalar, definido según la fórmula (57.30), se denota mediante $CL_2[a, b]$.

La norma en el espacio $CL_2[a, b]$ se determina mediante la fórmula (57.31).

Lema 13. *Es espacio $CL_2[a, b]$ no es de Hilbert.*

DEMOSTRACIÓN. Para convencerse de que todo espacio $CL_2[a, b]$ no es completo, basta considerar el espacio $CL_2[a, b]$ para cierto segmento fijo (¿por qué?). Elijamos, para concretar, el segmento $[-1, 1]$ y demos un ejemplo de la sucesión de funciones fundamental en el espacio $CL_2[-1, 1]$ que no converge en dicho espacio.

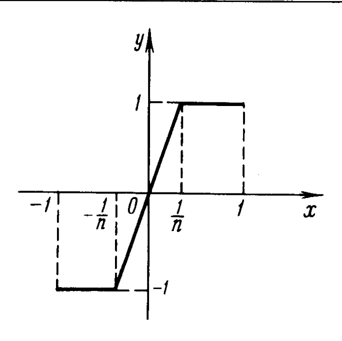


Fig. 237

Pongamos

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant -\dfrac{1}{n}, \\ nx, & \text{si} \quad -\dfrac{1}{n} < x < \dfrac{1}{n}, \\ 1, & \text{si} \quad \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{57.34}$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

(fig. 237). Es evidente que las funciones $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, son continuas en el segmento $[-1, 1]$. Observando luego que $|f_n(x)| \leqslant 1$, tenemos para $m > n$

$$\|f_n - f_m\|^2 = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx = \int_{-1/n}^{1/n} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-1/n}^{1/n} [|f_n(x)| + |f_m(x)|]^2 dx \leqslant 4 \int_{-1/n}^{1/n} dx = \frac{8}{n}$$

de donde, evidentemente, se deduce que la sucesión (57.34) es fundamental en el espacio $CL_2[a, b]$.

Efectivamente, si está dado $\varepsilon > 0$, entonces, al elegir n_0 de modo tal que sea $8/n_0 < \varepsilon$, para todos los $n \geqslant n_0$ y cualesquiera $m > n$ tendremos $\|f_n - f_m\| < \frac{8}{n} \leqslant \frac{8}{n_0} < \varepsilon$. Como

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{para} \quad -1 \leqslant x < 0, \\ 0 & \text{para} \quad x = 0, \\ 1 & \text{para} \quad 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

es natural esperar que si la sucesión $\{f_n\}$ converge en el sentido de la media cuadrática, converge hacia la misma función, a la que converge puntualmente, es decir, hacia la función (véase fig. 238):



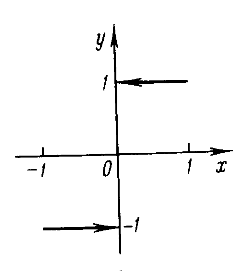


Fig. 238

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} -1 & \text{para} \quad -1 \leqslant x < 0, \\ 0 & \text{para} \quad x = 0 \\ 1 & \text{para} \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Sin embargo, esta función f es discontinua, por lo cual $f \notin CL_2[0, 1]$. Por consiguiente, es natural esperar que la sucesión $\{f_n\}$ no tiene límite en el espacio $CL_2[a, b]$. Probémoslo.

No es difícil de convencerse de que la sucesión (57.34) converge en el segmento $[-1, 1]$ en el sentido de la seminorma (57.31) hacia la función f. En efecto,

$$\|f - f_n\|^{2\,*)} = \int_{-1}^{1} |f(x) - f_n(x)|^2 dx =$$

$$= \int_{-1/n}^{1/n} |f(x) - f_n(x)|^2 dx \leqslant \int_{-1/n}^{+1/n} [|f(x)| + |f_n(x)|^2] dx \leqslant$$

$$\leqslant 4 \int_{-1/n}^{+1/n} dx = \frac{8}{n} \to 0 \quad \text{para} \quad n \to \infty, \tag{57.35}$$

pues, $|f(x)| \leqslant 1$, $|f_n(x)| \leqslant 1$, $x \in [-1, 1]$.

El límite según la seminorma no es único y por eso surge la cuestión: ¿existe o no, además, una función continua que también sirva de límite de la sucesión $\{f_n\}$ en el sentido de la media cuadrática? Mostremos que tal función no existe. Admitamos lo contrario. Supongamos que existe una función $g(x)$, continua en el segmento $[-1, 1]$, tal que

$$\lim_{n \to \infty} \|g - f_n\| = 0. \tag{57.36}$$

En este caso

$$\|f - g\| = \|(f - f_n) + (f_n - g)\| \leqslant \|f - f_n\| + \|f_n - g\|,$$

---

*) Por cuanto $f - f_n$ ya no es una función continua, el símbolo $\|\varphi\|$ significa aquí la seminorma (57.31) de la función φ. Esto debe tomarse en consideración también en los razonamientos que siguen.

donde ambos sumandos del segundo miembro, en virtud de (57.35) y (57.36), tienden a cero cuando $n \to \infty$, mientras que el primer miembro no depende de n, por consiguiente,

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|^2 dx = \|f - g\|^2 = 0;$$

y, con mayor razón,

$$\int_{-1}^{0} |f(x) - g(x)|^2 dx = 0, \quad \int_{0}^{1} |f(x) - g(x)|^2 dx = 0. \tag{57.37}$$

Examinemos, por ejemplo, el caso de $x \geqslant 0$. Dado que las funciones f y g son continuas en el intervalo (0, 1), entonces, en virtud de (57.37), coinciden en dicho intervalo (véase la propiedad 9 de la integral definida en el p. 28.1). Por eso

$$g(+0) = \lim_{x \to +0} g(x) = \lim_{x \to +0} f(x) = 1.$$

Por analogía, considerando el caso cuando $x \leqslant 0$, tendremos

$$g(-0) = \lim_{x \to -0} f(x) = -1,$$

es decir, g es una función discontinua.

La contradicción obtenida demuestra precisamente la afirmación. □

Así pues, el espacio lineal $CL_2[a, b]$ no es completo. No obstante, sabemos que todo espacio prehilbertiano puede ser complementado hasta que se obtenga un espacio completo, en particular, esto es cierto con relación al espacio en consideración. Volveremos a este problema un poco más abajo y ahora mismo analizaremos un espacio más.

Trataremos de abarcar una clase de funciones más amplia que las funciones continuas, a saber, consideraremos el espacio lineal $RL_2[a, b]$ de las funciones de cuadrado integrable en cierto segmento $[a, b]$ (véase el ejemplo 3 en el p. 57.8) y provisto de producto semiescalar que viene definido mediante la fórmula (57.30) y construyamos, valiéndonos de este espacio, otro espacio dotado de producto escalar.

Definición 38. *Dos funciones f y g de cuadrado integrable en el segmento $[a, b]$ las llamaremos equivalentes, si la seminorma* (57.31) *de su diferencia es igual a cero*:

$$\|f - g\| = \sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx} = 0. \tag{57.38}$$

La equivalencia de las funciones en el sentido de esta definición se designará por el símbolo.

$$f \sim g. \tag{57.39}$$

El empleo en este caso del mismo símbolo que se ha usado para designar la igualdad asintótica de las funciones, es decir, designar su equivalencia en el sentido del orden de su variación (véase la definición 3 en el p. 8.2), no nos llevará a equivocaciones algunas, puesto que cada vez quedará claro de qué equivalencia entre las funciones se trata en el caso dado.

La relación de equivalencia (57.39) posee las siguientes propiedades:

1°) $f \sim f$;

2°) si $f \sim g$, también $g \sim f$;

3°) si $f \sim g$ y $g \sim h$, entonces $f \sim h$.

Un conjunto de todas las funciones de cuadrado integrable en el segmento $[a, b]$, es decir, el espacio $RL_2[a, b]$ lo dividiremos en clases de las funciones equivalentes entre sí. Dichas clases se llamarán clases de equivalencia y se denotarán por letras latinas mayúsculas $F, G, H, \ldots$, y la totalidad de ellas, por $\mathfrak{F}$. Toda función f, perteneciente a la clase de equivalencia F, se denominará representante de dicha clase. Expresando brevemente el proceso de construcción del conjunto $\mathfrak{F}$, suele decirse que dicho conjunto se obtiene del conjunto de todas las funciones de cuadrado integrable por "identificación" de sus elementos equivalentes. Así pues, ahora cada conjunto de las funciones equivalentes se considera como un único elemento del conjunto $\mathfrak{F}$.

Para todo $F \in \mathfrak{F}$ y cada número real λ el elemento λF se determina de la manera siguiente. Elijamos un representante $f \in F$, entonces la función λf será también una función de cuadrado integrable en el segmento $[a, b]$, y por lo tanto, pertenece a cierta clase de equivalencia, es decir, será un representante de cierto elemento, perteneciente a $\mathfrak{F}$, el cual se determina precisamente como elemento λF.

Con el fin de mostrar que esta definición es correcta, conviene demostrar que el elemento λF no depende de cómo se elige la función $f \in F$. En efecto, si $f \in F$ y $f_1 \in F$, entonces $f_1 \sim f$, es decir, $\|f_1 - f\| = 0$. Por consiguiente, $\|\lambda f_1 - \lambda f\| = |\lambda| \|f_1 - f\| = 0$, lo que quiere decir que $\lambda f_1 \sim \lambda f$. I or esta razón las funciones λf_1 y λf pertenecen a una misma clase de equivalencia, es decir, a un mismo elemento del conjunto $\mathfrak{F}$.

Definamos ahora la operación de adición de los elementos del conjunto $\mathfrak{F}$. Sea $F \in \mathfrak{F}$ y $G \in \mathfrak{F}$. Elijamos unas funciones $f \in g$ y $f \in G$. Un elemento $F + G$ lo definamos como una clase de equivalencia que contiene el elemento $f + g$. Esta definición es unívoca, pues, si

$$f \in F, \quad f_1 \in F, \quad g \in G, \quad g_1 \in G$$

y, por consiguiente,

$$f_1 \sim f, \quad g_1 \sim g,$$

entonces

$$\|f_1 - f\| = 0, \quad \|g_1 - g\| = 0.$$

Por esto

$$0 \leqslant \|(f_1 + g_1) - (f + g)\| \leqslant \|f_1 - f\| + \|g_1 - g\| = 0,$$

es decir,

$$f_1 + g_1 \sim f + g$$

y, de este modo, la función $f_1 + g_1$ pertenece a la misma clase de equivalencia que la función $f + g$.

Así pues, para sumar los elementos del conjunto $\mathfrak{F}$ o multiplicarlos por un número, se deben elegir sus representantes, sobre los cuales ha de realizarse la operación indicada; de resultas se obtendrá cierta función; la clase de equivalencia, de cuyo representante es la citada función, será precisamente el resultado de la operación que se considera.

El conjunto $\mathfrak{F}$ con las operaciones introducidas λF y $F + G$ forma un espacio lineal. En efecto, para dichas operaciones se cumplen las propiedades 1°, 2°, 3° de la definición 11 en el p. 57.2. Comprobemos, por ejemplo, que para cualesquiera $F \in \mathfrak{F}$, $G \in \mathfrak{F}$ y todo número λ se verifica la desigualdad

$$\lambda(F + G) = \lambda F + \lambda G. \tag{57.40}$$

Si $f \in F$ y $g \in G$, entonces, de acuerdo con la definición de adición de elementos del conjunto $\mathfrak{F}$, obtendremos $f + g \in F + G$, $\lambda(f + g) \in \lambda(F + G)$. Por cuanto f y g son los elementos del espacio lineal, entonces $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$. En virtud de la regla de multiplicación de los elementos de $\mathfrak{F}$ por un número y de adición de estos elementos

$$\lambda f \in \lambda F, \quad \lambda g \in \lambda G, \quad \lambda f + \lambda g \in \lambda F + \lambda G.$$

De este modo, las clases de equivalencia $\lambda(F + G)$ y $\lambda F + \lambda G$ contienen un elemento común $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$, y, por lo tanto, coinciden. La igualdad (57.40) queda demostrada.

Análogamente se comprueba también el cumplimiento de las demás propiedades de los espacios lineales (véase la definición 11 en el p. 57.2) para las operaciones de adición y multiplicación por un número de los elementos pertenecientes al conjunto $\mathfrak{F}$.

Indiquemos que la clase de equivalencia que contiene una función idénticamente igual a cero en el segmento $[a, b]$ representa el cero del espacio lineal obtenido $\mathfrak{F}$. Esta clase se compone de aquellas, y sólo aquellas, funciones f que son equivalentes a cero, en otras palabras, para las cuales la seminorma (57.31) es igual a cero: $\|f\| = 0$, es decir,

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0.$$

Definamos ahora en el espacio lineal $\mathfrak{F}$ la multiplicación escalar. Sea $F \in \mathfrak{F}$, $G \in \mathfrak{F}$; elijamos, en las clases F y G, ciertas representantes $f \in F$ y $g \in G$ y pongamos

$$(F, G) \stackrel{\text{def}}{=} (f, g). \tag{57.41}$$

De este modo, para multiplicar escalarmente los elementos del espacio $\mathfrak{F}$, es preciso elegir sus representantes y multiplicarlos escalarmente uno por otro (en el sentido del producto semiescalar (57.30)). El resultado obtenido será precisamente igual al producto escalar de los elementos en consideración del conjunto $\mathfrak{F}$.

La definición (57.41) tampoco depende de la elección de las funciones en las clases de equivalencia. En efecto, si

$$f \in F, \quad f_1 \in F, \quad g \in G, \quad g_1 \subset G,$$

entonces

$$f_1 \sim f, \quad g_1 \sim g$$

y, por consiguiente,

$$\|f_1 - f\| = 0, \ \|g_1 - g\| = 0.$$

Por eso, haciendo uso de la desigualdad de Cauchy — Schwarz (57.28), obtendremos

$$0 \leqslant |(f_1, g_1) - (f, g)| = |[(f_1, g_1) - (f, g_1)] + [(f, g_1) - (f, g)]| \leqslant$$
$$\leqslant |(f_1 - f_1, g_1)| + |(f_1, g_1 - g)| \leqslant \|f_1 - f\| \|g_1\| + \|f\| \|g_1 - g\| = 0.$$

De este modo $(f_1, g_1) = (f, g)$.

La función (57.41) satisface todas las propiedades de la multiplicación escalar. Efectivamente, sea $f \in F \in \mathfrak{F}$, $g \in G \in \mathfrak{F}$, $h \in H \in \mathfrak{F}$, y sean λ y μ unos números, entonces

$$(\lambda F + \mu G, H) = (\lambda f + \mu g, h) = \lambda(f, h) + \mu(g, h) = \lambda(F, H) + \mu(G, H),$$
$$(F, G) = (f, g) = (g, f) = (G, F),$$
$$(F, F) = (f, f) \geqslant 0.$$

Por fin, si $(F, F) = 0$, esto es testimonio de que para cualquier función $f \in F$ se tiene $(f, f) = \|f\|^2 = 0$, es decir, $f \sim 0$, que, de acuerdo con lo dicho anteriormente, significa precisamente que el elemento F es el elemento nulo del espacio $\mathfrak{F}$.

Definición 39. *El espacio lineal* $\mathfrak{F}$ *provisto de producto escalar* (57.41) *lleva el nombre de espacio* $\widetilde{RL}_2 = \widetilde{RL}_2[a, b]$.

Indiquemos que la norma $\|F\|_{\widetilde{RL}_2}$ del elemento F en el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$ se determina, de conformidad con (57.27) y (57.41), en términos de la seminorma $\|f\|_{RL_2}$ de la función $f \in F$ según la fórmula

$$\|F\|_{\widetilde{RL}_2} = \|f\|_{RL_2} = \left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{1/2}, \quad f \in F, \tag{57.42}$$

con la particularidad de que, en virtud de la univocidad demostrada de la definición de producto escalar, la definición 39 es unívoca, es decir, no depende de la elección de la función $f \in F$.

OBSERVACIÓN 1. Los elementos del espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$ están constituidos por las clases de funciones equivalentes; no obstante, en la literatura matemática se encuentra a menudo la expresión "función del espacio $\widetilde{RL}_2$". Esta expresión convencional significa simplemente que se trata de una función de cuadrado integrable la que, por consiguiente, pertenece a una de las clases de funciones equivalentes que se consideran, es decir, es el representante de esta clase. Dicha expresión es cómoda, puesto que las operaciones de sumación, de multiplicación por un número y de multiplicación escalar de las clases de funciones equivalentes se reducen a la operación correspondiente sobre sus representantes, con la particularidad de que el resultado no depende de la elección de los representantes mencionados. Esta circunstancia justifica en cierto sentido una expresión de uso frecuente "el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$ se compone de las funciones de cuadrado integrable", en este caso el espacio $\widetilde{RL}_2$ se designa a menudo simplemente mediante RL_2.

Toda función continua en el segmento $[a, b]$, siendo función de cuadrado integrable en este segmento, pertenece a cierta clase de equivalencia, es decir, a cierto elemento del espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$. Además, en la clase indicada no hay otra función continua, pues si las funciones continuas son equivalentes, son también iguales.

Estudiaremos una aplicación que a toda función continua $f \in CL_2[a, b]$ le pone en correspondencia la clase de equivalencia $F \in \widetilde{RL}_2[a, b]$, a la que esta función pertenece: $f \in F$. Esta aplicación se denomina *aplicación natural* de $CL_2[a, b]$ en $\widetilde{RL}_2[a, b]$. En virtud de la propia definición de las operaciones de sumación de elementos (que son las clases de equivalencia), de su multiplicación por un número y su producto escalar en el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$ que se reducen a las mismas operaciones sobre los representantes de las clases de equivalencia, la aplicación natural es lineal y conserva el producto escalar. Es la aplicación biunívoca (inyección) del espacio $CL_2[a, b]$ en el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$, puesto que si, realizándose esta aplicación, dos funciones continuas se aplicaran en un mismo elemento del espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$, es decir, en la misma clase de equivalencia, entonces ambas pertenecerían a esta clase. Lo último es posible, de acuerdo con lo afirmado más arriba, sólo en el caso en que representan una misma función continua.

Con el fin de estudiar las propiedades restantes de la aplicación natural, demostremos tres lemas sobre la aproximación de las funciones. Para abreviar, en lugar de $\|\cdot\|_{RL_2}$ escribiremos en estos lemas simplemente $\|\cdot\|$.

Lema 14. *Supongamos que el cuadrado de la función f es integrable en un intervalo, finito o infinito, cuyos extremos son a y b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. En este caso para cualquier $\varepsilon > 0$ existe tal función φ* (véase el p. 55.2), *finita, escalonada e igual a cero fuera del intervalo mencionado, que*

$$\|f - \varphi\| < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, para simplificar, que la función f es integrable según Riemann en cualquier segmento $[\xi, \eta]$, $a < \xi < \eta < b$, es decir, dentro del segmento en consideración con los extremos a y b no hay puntos singulares de la función f (véase el p. 55.1). El caso general se reduce fácilmente a éste.

Sea dado $\varepsilon > 0$. Fijemos ξ y η de modo tal que sea

$$\int_a^\xi f^2(x)dx + \int_\eta^b f^2(x)dx < \frac{\varepsilon^2}{2}. \tag{57.43}$$

Esto es posible, puesto que la integral extendida al segmento $[a, b]$ de la función f^2 es convergente. La función f, siendo integrable según Riemann en el segmento $[\xi, \eta]$, está acotada en él:

$$|f(x)| \leqslant M, \xi \leqslant x \leqslant \eta, \tag{57.44}$$

donde M es una constante.

De acuerdo con el lema 2 del p. 55.2, para $\varepsilon > 0$ dado existe una función escalonada finita φ tal que su portador supp φ está contenido en el segmento $[\xi, \eta]$, es decir, supp $\varphi \subset [\xi, \eta]$,

$$|\varphi(x)| \leqslant M, \quad x \in [\xi, \eta] \tag{57.45}$$

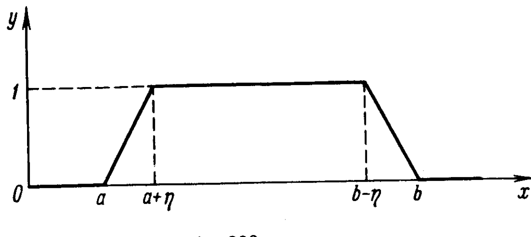


Fig. 239

(esto proviene de la fórmula (55.9)) y

$$\int_\xi^\eta |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \frac{\varepsilon^2}{4M}. \tag{57.46}$$

Al aplicar sucesivamente las desigualdades (57.43), (57.44), (57.45) y (57.46), obtendremos:

$$\|f - \varphi\|^2 = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx = \int_a^\xi f^2(x)dx + \int_\eta^b f^2(x)dx +$$

$$+ \int_\xi^\eta [f(x) - \varphi(x)]^2 dx \leqslant \frac{\varepsilon^2}{2} + \int_\xi^\eta [|f(x)| + |\varphi(x)|]\, |f(x) - \varphi(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon^2}{2} + 2M \int_\xi^\eta |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \frac{\varepsilon^2}{2} + 2M \frac{\varepsilon^2}{4M} = \varepsilon^2.$$

De aquí se deduce que $\|f - \varphi\| < \varepsilon$. □

Lema 15. *Sea φ una función escalonada finita, igual a cero fuera del segmento $[a, b]$; entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una función g, finita, continua en todo el eje numérico e igual a cero fuera del segmento citado, de tal índole que*

$$\|g - \varphi\| < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN. Será suficiente considerar el caso de la función característica del semiintervalo, pues toda función escalonada finita es una combinación lineal finita de las funciones semejantes (véase el p. 55.2). Así pues, sea dada una función

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad a \leqslant x < b, \\ 0 & \text{para} \quad x < a \text{ y } x \geqslant b, \end{cases}$$

y dado también $\varepsilon > 0$. Tomemos un $\eta > 0$ de modo tal que se cumplan las desigualdades

$$\eta < \frac{\varepsilon^2}{8}, \quad \eta < \frac{b - a}{2},$$

y consideremos la función $g(x)$ cuya gráfica está expuesta en la fig. 239.

Dicha función puede ser escrita analíticamente del modo siguiente:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < a \text{ y } x > b, \\ \dfrac{x-a}{\eta} & \text{para } a \leqslant x \leqslant a + \eta, \\ 1 & \text{para } a + \eta < x < b - \eta, \\ \dfrac{b-x}{\eta} & \text{para } b - \eta \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

Es evidente que $g(x)$ es una función finita continua en todo el eje numérico. Por cuanto $|\chi(x)| \leqslant 1$, $|g(x)| \leqslant 1$, $-\infty < x < +\infty$, entonces

$$\|\chi - g\|^2 = \int_a^b [\chi(x) - g(x)]^2 dx = \int_a^{a+\eta} [\chi(x) - g(x)]^2 dx +$$
$$+ \int_{b-\eta}^b [\chi(x) - g(x)]^2 dx \leqslant \int_a^{a+\eta} [|\chi(x)| + |g(x)|]^2 dx +$$
$$+ \int_{b-\eta}^b [|\chi(x)| + |g(x)|]^2 dx \leqslant 4 \int_a^{a+\eta} dx + 4 \int_{b-\eta}^b dx < 8\eta < \varepsilon^2,$$

es decir, $\|\chi - g\| < \varepsilon$. □

Lema 16. *Si f es una función de cuadrado intergable en el segmento $[a, b]$, constituye en este segmento el límite, en el sentido de la media cuadrática, para la sucesión de funciones finitas y continuas en todo el eje numérico f_n, $n = 1, 2, \ldots$, cuyos portadores se disponen en el segmento $[a, b]$:*

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|^2 = \lim_{n \to \infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx = 0. \qquad (57.47)$$

DEMOSTRACIÓN. Cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, en virtud del lema 14, existe tal función finita escalonada φ, igual a cero fuera del segmento $[a, b]$, que

$$\|f - \varphi\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

y, en virtud del lema 15, para esta función escalonada φ se encontrará tal funcıon g, continua en todo el eje numérico e igual a cero fuera del segmento $[a, b]$, que

$$\|\varphi - g\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

y, por lo tanto, (fig. 240)

$$\|f - g\| \leqslant \|f - \varphi\| + \|\varphi - g\| < \varepsilon.$$

Al elegir ahora una sucesión numérica ε_n que tiende a $+0$ cuando $n \to \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, y designar por f_n una función continua en todo el eje numérico que, en virtud de la construcción citada, corresponde al número ε_n y es igual a cero fuera del segmento $[a, b]$, obtendremos la sucesión buscada $\{f_n\}$ que satisface la condición (57.47) (la definición del límite de la sucesión de funciones en el sentido de la media

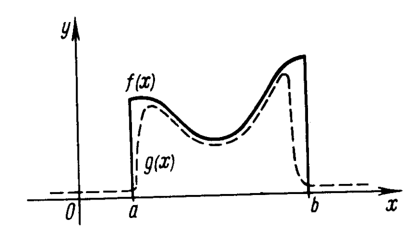


Fig. 240

cuadrática véase en el p. 57.5) y es tal que supp $f_n \subset [a, b]$ para todo $n = 1, 2, \ldots$. □

Definición 40. *Un subconjunto del espacio $CL_2[a, b]$, compuesto de las funciones f que se reducen a cero en los extremos del segmento $[a, b]$: $f(a) = f(b) = 0$, se llama espacio $\mathring{C}L_2[a, b]$.*

Obviamente, el lema 16 significa que toda función de cuadrado integrable en el segmento $[a, b]$ puede aproximarse, con cualquier grado de precisión en el sentido de la media cuadrática, mediante las funciones pertenecientes a $\mathring{C}L_2[a, b]$. Está claro que $\mathring{C}L_2[a, b]$ es un espacio lineal prehilbertiano y

$$\mathring{C}L_2[a, b] \subset CL_2[a, b]. \qquad (57.48)$$

Volveremos ahora a la aplicación natural

$$CL_2[a, b] \to \widetilde{RL}_2[a, b].$$

Teorema 5. *La aplicación natural $CL_2[a, b] \to \widetilde{RL}_2[a, b]$, es decir, aquella que a toda función continua en el segmento $[a, b]$ le pone en correspondencia una clase de equivalencia a la que dicha función pertenece, es la aplicación isomorfa del espacio $CL_2[a, b]$ en $\widetilde{RL}_2[a, b]$, con la particularidad de que la imagen del espacio, $\mathring{C}L_2[a, b]$ (y, por consiguiente, en virtud de (57.48), de todo el espacio $CL_2[a, b]$ también) es densa en $\widetilde{RL}_2[a, b]$.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 5. Designemos con Φ la aplicación natural del espacio $CL_2[a, b]$ en el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$, es decir, aquella que a toda función f, continua en el segmento $[a, b]$, le pone en correspondencia una clase de funciones equivalentes de cuadrado integrable en dicho segmento a la que f pertenece, en otras palabras, la clase de equivalencia, de cuyo representante interviene la propia f. De este modo, si

$$f \in CL_2[a, b] \quad \text{y} \quad f \in F \in \widetilde{RL}_2[a, b],$$

entonces $\Phi(f) = F$.

Sea $F = \Phi(f) = 0$; en este caso $\|F\| = 0$, pero $f \in F$, por lo cual, también $\|f\| = \theta$. De conformidad con la propiedad de la norma, de aquí se deduce que $f = 0$, es decir, el núcleo de la aplicación Φ se compone sólo del elemento nulo. Por cuanto la aplicación natural Φ es lineal, aplica biunívocamente el espacio $CL_2[a, b]$ en el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$ (véase el lema 2 en el p. 57.2).

Mostremos que la imagen del espacio $\mathring{C}L_2[a, b]$ en esta aplicación es un conjunto denso en el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$. Supongamos que $F \in \widetilde{RL}_2[a, b]$ y la función f es el

representante del segmento F, es decir, $f \in F$. Como f es una función de cuadrado integrable en el segmento $[a, b]$, entonces, de acuerdo con el lema 3, es el límite en el sentido de la media cuadrática para cierta sucesión de las funciones f_n, continuas en el segmento $[a, b]$, que se reducen a cero en los extremos de éste (véase (57.47)), es decir $f_n \in \overset{\circ}{C}L_2[a, b]$, $n = 1, 2, \ldots$. Si $f_n \in F_n \in \widetilde{RL}_2[a, b]$, entonces, según la definición de norma en el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$, obtenemos

$$\| F_n - F \|_{\widetilde{RL}_2} = \| f_n - f \|_{RL_2},$$

donde a la derecha figura, como siempre, la seminorma (57.31). De aquí, en virtud de la igualdad (57.47), se obtiene

$$\lim_{n \to \infty} \| F_n - F \| = 0. \tag{57.49}$$

Por cuanto la clase de equivalencia F ha sido un elemento fijo arbitrario del espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$, y $F_n = \Phi(f_n)$, donde f_n es una función continua en el segmento $[a, b]$ que se reduce a cero en los extremos de este segmento y, por lo tanto, $F_n \in \Phi(\overset{\circ}{C}L_2[a, b])$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces la igualdad (57.49) significa precisamente la densidad de la imagen del conjunto $\overset{\circ}{C}L_2[a, b]$ en el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$ en el transcurso de la aplicación Φ.

Para demostrar la densidad de la imagen del conjunto $CL_2[a, b]$ en la aplicación natural de éste en el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$, observemos que de la inclusión (57.48) se infiere, evidentemente, que

$$\Phi(\overset{\circ}{C}L_2[a, b]) \subset \Phi(CL_2[a, b]) \subset \widetilde{RL}_2[a, b].$$

Mientras tanto, si en algún espacio métrico X es denso el conjunto A, es decir, si $\overline{A} = X$ y $A \subset B \subset X$, entonces, por supuesto, el conjunto B es también denso en X, pues $\overline{A} \subset \overline{B} \subset X$, y, como $\overline{A} = X$, se tiene también que $\overline{B} = X$. Por eso, de la densidad del conjunto $\Phi(\overset{\circ}{C}L_2[a, b])$ en el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$ se desprende que el conjunto $\Phi(CL_2[a, b])$ es también denso en él. □

Identificando toda función continua $f \in CL_2[a, b]$ con la clase de funciones equivalentes $F \in \widetilde{RL}_2[a, b]$ a la que la función f pertenece: $f \in F$, es decir, identificando f con su imagen en la aplicación natural Φ, llegamos a que $CL_2[a, b]$ es un subconjunto del espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$:

$$CL_2[a, b] \subset \widetilde{RL}_2[a, b]. \tag{57.50}$$

Esta inclusión lleva el nombre de *encaje natural* del espacio CL_2 en el espacio $\widetilde{RL}_2$.

Así pues, en virtud de (57.48) y (57.50), resultan lícitas las inclusiones

$$\overset{\circ}{C}L_2[a, b] \subset CL_2[a, b] \subset \widetilde{RL}_2[a, b],$$

con la particularidad de que, de acuerdo con el teorema 5,

$$\overline{\overset{\circ}{C}L_2[a, b]} = \widetilde{RL}_2[a, b],$$

es decir, $\overset{\circ}{C}L_2[a, b]$, y, por ende, $CL_2[a, b]$, son densos en el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$.

Se puede mostrar que el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$ no es completo, es decir, no es espacio de Hilbert.

Problema 37. Demuéstrese que el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$ no es completo.

En el p. 57.9 se ha demostrado que todo espacio prehilbertiano puede ser completado hasta que se obtenga un espacio completo, es decir, un espacio de Hilbert. En el caso particular, esto puede realizarse con relación al espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$.

Definición 41. *La completación del espacio prehilbertiano $\widetilde{RL}_2 = \widetilde{RL}_2[a, b]$ se denomina espacio $L_2 = L_2[a, b]$.*

Por definición de la completación tenemos

$$\widetilde{RL}_2[a, b] \subset L_2[a, b] \tag{57.51}$$

y $\widetilde{RL}_2[a, b]$ es denso en el espacio $L_2[a, b]$, es decir,

$$\overline{\widetilde{RL}_2[a, b]} = L_2[a, b].$$

En virtud de las inclusiones (57.48), (57.50) y (57.51) tienen lugar los encajes naturales

$$\overset{\circ}{C}L_2[a, b] \subset CL_2[a, b] \subset \widetilde{RL}_2[a, b] \subset L_2[a, b]. \tag{57.52}$$

Resulta que no sólo $\widetilde{RL}_2$ es denso en el espacio L_2, sino que $\overset{\circ}{C}L_2$ es también denso en L_2.

Teorema 6. *El espacio $\overset{\circ}{C}L_2[a, b]$ es denso en el espacio $L_2[a, b]$.*

Corolario. *El espacio $CL_2[a, b]$ es denso en el espacio $L_2[a, b]$.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 6. Sea $f \in L_2[a, b]$ y sea arbitrariamente fijado $\varepsilon > 0$. Para simplificar, todos los elementos del espacio $L_2[a, b]$ se designarán por letras latinas minúsculas, aunque dichos elementos no son, en el caso general, funciones. Por cuanto el espacio $L_2[a, b]$ es una completación del espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$, existe obligatoriamente tal elemento $g \in \widetilde{RL}_2[a, b]$ que

$$\| f - g \|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De conformidad con la inclusión (57.52) y densidad del conjunto $\overset{\circ}{C}L_2[a, b]$, en el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$ existe tal elemento $h \in \overset{\circ}{C}L_2[a, b]$, que

$$\| g - h \|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por eso

$$\| f - h \|_{L_2} \leqslant \| f - g \|_{L_2} + \| g - h \|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto precisamente implica que el conjunto $\overset{\circ}{C}L_2[a, b]$ es denso en el espacio $L_2[a, b]$. □

El corolario se deduce naturalmente del teorema, puesto que (como se ha probado en la demostración del teorema 5) si un subconjunto A de cierto conjunto B, $A \subset B$, es denso en algún espacio métrico $X \supset B$, entonces el mismo conjunto B es, con mayor razón, denso en X. En el caso dado $\overset{\circ}{C}L_2[a, b] \subset CL_2[a, b] \subset L_2[a, b]$ y $\overset{\circ}{C}L_2[a, b]$ es denso en $L_2[a, b]$. Por eso, $CL_2[a, b]$ es también denso en $L_2[a, b]$. □

Ejercicio 24. Demuéstrese que si X es un espacio métrico, $A \subset B \subset X$, el conjunto A es denso en el conjunto B, y si el conjunto B es denso en el espacio X, entonces el conjunto A es también denso en el espacio X.

OBSERVACIÓN 2. Si consideramos $L_2[a, b]$ como un espacio que se obtiene del espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$ mediante la construcción (descrita en los teoremas 1, 3, 4 del presente párrafo) de la completación de espacios, entonces, como sus elementos intervendrán las clases de sucesiones fundamentales equivalentes compuestas de las clases de funciones equivalentes de cuadrado integrable. Si, en este caso, realizamos la identificación de los espacios CL_2 y RL_2 con sus imágenes en L_2, según se ha indicado más arriba, y de este modo consideramos que

$$CL_2 \subset \widetilde{RL}_2 \subset L_2,$$

resultará pues que el espacio L_2 queda compuesto de las funciones continuas, de las clases de funciones equivalentes de cuadrado integrable privadas de funciones continuas, y de los "elementos abstractos" que representan las clases indicadas de sucesiones fundamentales. Luego, todos los elementos del espacio $\widetilde{RL}_2$ pueden ser "sustituidos", de modo convencional en el sentido de la observación 1, por unas funciones, esto es, por sus representantes arbitrariamente elegidos. Entonces el espacio L_2 resultará compuesto de las funciones de cuadrado integrable y los mismos elementos abstractos que surgen forzosamente en el transcurso de completación del espacio $\widetilde{RL}_2$, en vista de que no es completo. Esta "sustitución convencional" de los elementos del espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$ por sus representantes refleja una afirmación exacta de que las operaciones sobre las clases de funciones equivalentes se reducen a las operaciones correspondientes con sus representantes en el sentido indicado arriba.

Resulta pues, y esto es muy interesante e importante, que los elementos abstractos mencionados pueden considerarse no como las clases de sucesiones fundamentales de las clases de equivalencia, sino como ciertas funciones, con más precisión, como clases de funciones equivalentes en el sentido de la definición 38, con la particularidad de que el producto escalar para ellas se determina también mediante las fórmulas (57.30) y (57.41) con la única peculiaridad consistente en que la integral en dichas fórmulas conviene entenderla no en el sentido de la integral de Riemann, propia o impropia, sino en el sentido de la así llamada integral de Lebesgue. El análisis de este problema sale, sin embargo, de los márgenes de los métodos que se consideran y no se realizará en el curso dado. Se puede encontrar dicho análisis en el excelente libro de texto "Curso del análisis matemático" de S. M. Nikolski.

OBSERVACIÓN 3. La definición del espacio $L_2[a, b]$ se generaliza también del modo natural al caso de un intervalo infinito. Consideraremos, para concretar, todo el eje numérico. Para dos funciones φ y ψ, continuas e integrables en cuadrado en todo el eje real, el producto escalar se determinará según la fórmula

$$(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\psi(x)dx. \tag{57.53}$$

Esta definición es correcta, pues la integral que figura en el segundo miembro converge, asumidas las suposiciones respecto de las funciones φ y ψ, y converge, además, absolutamente. Esto proviene inmediatamente de la desigualdad

$$|\varphi(x)\psi(x)| \leqslant \frac{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}{2}.$$

Las propiedades del producto escalar para (57.53) se comprueban fácilmente. Se puede mostrar, por analogía con el caso de un intervalo finito, que el espacio métrico (que se obtiene en este caso) de funciones continuas e integrables en cuadrado, al igual que el espacio prehilbertiano que se obtiene mediante la "identificación" de las funciones equivalentes de cuadrado integrable en todo el eje numérico, no es completo en la métrica engendrada por el producto escalar (57.53). Las completaciones de estos espacios coinciden salvo un isomorfismo, y se designan con $L_2(-\infty, +\infty)$.

Ejercicios. 25. Demuéstrese que la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ en el segmento [0, 1] no es un límite, en el sentido de la media cuadrática, de una sucesión de funciones continuas.

26. Demuéstrese que para una sucesión de funciones los conceptos de convergencia en media en el sentido de L_1 y en el sentido de L_2 no son equivalentes.

27. Demuéstrese que si una sucesión de funciones integrables en cierto segmento converge uniformemente en el mismo hacia cierta función integrable en él, entonces dicha sucesión en el segmento mencionado converge hacia la misma función y converge en media tanto en el sentido de L_1, como en el de L_2.

28. Constrúyase un ejemplo de sucesión de funciones, continuas en cierto segmento, que converja en él hacia cierta función continua en media en el sentido de L_2, pero no converja uniformemente en dicho segmento.

29. Constrúyase un ejemplo de sucesión de funciones continuas no negativas en un segmento que converja en él en media, pero no converja en el sentido de la media cuadrática.

Problema 38. Demuéstrese que para cualquier p, $1 \leqslant p < +\infty$, y cualquier intervalo con extremos en los puntos a y b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, el conjunto de funciones continuas en este intervalo es denso en el espacio $\widetilde{RL}_p(a, b)$.

Hemos descrito diferentes tipos de los espacios. En el análisis matemático se estudian, principalmente, los espacios cuyos elementos están constituidos por funciones. Los espacios de este género se denominan *funcionales*.

En los ejemplos citados se consideraban, para simplificar, las funciones de una sola variable. De un modo similar, si tomamos un espacio lineal de funciones continuas en la clausura de cierto conjunto $G \subset R^n$, medible según Jordan, introducimos un producto escalar de acuerdo con la fórmula $(\varphi, \psi) = \int \varphi\psi dG$ y completamos a continuación el espacio obtenido, obtendremos un espacio de Hilbert que se denota con $L_2(G)$.

Se puede mostrar en este caso que todos los espacios $L_2(G)$, obtenidos de este modo, serán espacios de Hilbert separables de dimensión infinita.

El hecho de que el espacio $L_2[a, b]$ es de dimensión infinita será confirmado en el p. 58.2 y la separabilidad de este espacio se demostrará en el p. 58.3 (teorema 2).

En adelante (véase el p. 58.5, teorema 10) demostraremos que todos los espacios de Hilbert separables de dimensión infinita son isomorfos entre sí. De este modo, al estudiar las propiedades determinadas de las funciones de una o varias variables, se logra formar los espacios L_2 de algunos de los conjuntos de dichas funciones. No obstante, habiéndose convertido en los puntos de estos espacios, las funciones pierden muchas de sus propiedades individuales. En particular, los espacios L_2 no se diferencian uno del otro en lo que se refiere al número de variables, de las cuales dependen las funciones que forman parte de estos espacios. Naturalmente, esta circunstancia no impide de ninguna manera de que los espacios funcionales se empleen con gran éxito tanto en los problemas netamente teóricos, como en las aplicaciones de las matemáticas.

Las numerosas definiciones introducidas en este párrafo se utilizarán en lo que sigue para describir ciertas propiedades de diferentes clases de funciones en términos geométricos habituales y demostrativos (espacio, punto, distancia, vector, base, etc.) y ayudarán a establecer la analogía que existe entre los espacios vectoriales n-dimensionales ordinarios y los de funciones y aclarar, además, las propiedades específicas de los espacios funcionales de dimensión infinita.

§ 58. BASES ORTONORMALIZADAS Y DESARROLLOS SEGÚN ELLAS

58.1. SISTEMAS ORTONORMALIZADOS

Definición 1. *Sea X un espacio lineal con un producto semiescalar. Los elementos $x \in X$ e $y \in X$ se denominan ortogonales, si $(x, y) = 0$, y en este caso se anota también $x \perp y$.*

Definición 2. *Un sistema de elementos x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ es cierto conjunto de índices) del espacio lineal X provisto de producto semiescalar se denomina ortogonal, si dos elementos cualesquiera suyos son ortogonales. Si, además, la norma de todo elemento suyo es igual a la unidad, es decir, $\|x_\alpha\| = 1$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, el sistema se llama ortonormalizado.*

Evidentemente, si el sistema x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, es ortogonal y $x_\alpha \neq 0$, cualquiera que sea $\alpha \in \mathfrak{A}$, aquél se puede "normalizar". Efectivamente, al dividir todo elemento por su norma, es decir, al multiplicar x_α por el número $1/\|x_\alpha\|$, obtendremos un sistema ortonormalizado

$$\left\{ \frac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|}, \alpha \in \mathfrak{A} \right\}.$$

Recordemos que si X es un espacio con un producto escalar, la condición $\|x\| \neq 0$ es equivalente a que $x \neq 0$.

Lema 1. *Si un sistema $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ de elementos del espacio X provisto de producto semiescalar es ortogonal y $\|x_\alpha\| \neq 0$, para cualquier $\alpha \in A$, dicho sistema es linealmente independiente.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que para ciertos elementos

$$x_{\alpha_k}, \quad \alpha_k \in \mathfrak{A}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

se tiene

$$\lambda_1 x_{\alpha_1} + \lambda_2 x_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n} = 0.$$

Multipliquemos escalarmente ambos miembros de esta igualdad por x_{α_k}, k está fijado ($k = 1, 2, \ldots, n$), obtendremos

$$\lambda_k (x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}) = 0,$$

pues, por ser ortogonal el sistema $(x_{\alpha_j}, x_{\alpha_k}) = 0$, $j \neq k$. Al observar luego que, por hipótesis, $x_{\alpha_k} \neq 0$, y, por lo tanto, $(x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}) \neq 0$, obtenemos $\lambda_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

La independencia lineal del sistema x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, está demostrada. □

Demostremos un lema más que expresa el criterio de independencia lineal de las funciones a través de los productos escalares.

Lema 2. *Si para el sistema de elementos $x_1, \ldots, x_n$ del espacio X provisto de producto escalar el determinante*

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} (x_1, x_1)(x_1, x_2) \ldots (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1)(x_2, x_2) \ldots (x_2, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_n, x_1)(x_n, x_2) \ldots (x_n, x_n) \end{vmatrix}$$

es igual a cero, el sistema es linealmente dependiente.

El determinante $G(x_1, \ldots, x_n)$ recibe el nombre de *determinante de Gram**) para el sistema dado.

DEMOSTRACIÓN. Consideraremos un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n, x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{58.1}$$

o bien

$$\lambda_1 (x_1, x_i) + \ldots + \lambda_n (x_n, x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

El determinante de este sistema será un determinante transpuesto de Gram, el cual, por hipótesis del lema, es igual a cero. Por consiguiente, el sistema (58.1) tiene una solución no trivial $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (es decir, una solución tal que no todas de las λ_i, $i = 1, 2, \ldots$, son nulas). Multipliquemos la igualdad (58.1) por λ_i y sumemos según i desde 1 hasta n:

$$(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n, \ \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) = 0.$$

De aquí, $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$, lo que expresa la dependencia lineal del sistema $x_1, \ldots, x_n$. □

Ejercicios. 1. Demuéstrese que si un sistema finito de elementos de un espacio prehilbertiano es linealmente dependiente, su determinante de Gram es igual a cero.

2. Demuéstrese que si $\{\omega_\alpha\}$ es un sistema ortonormalizado, entonces para cualesquiera dos elementos suyos ω_α y $\omega_{\alpha'}$, tiene lugar la igualdad

$$\|\omega_{\alpha'} - \omega_\alpha\| = \sqrt{2}, \quad \alpha' \neq \alpha.$$

3. Demuéstrese que las funciones $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} 3x$, $\operatorname{sen} 5x$, $\operatorname{sen} 7x$, $\operatorname{sen} 9x$ son linealmente independientes sobre cualquier intervalo de longitud positiva.

Ejemplos. 1. El sistema trigonométrico de funciones 1,

$$1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \ldots, \cos nx, \operatorname{sen} nx, \ldots \tag{58.2}$$

es ortogonal en el espacio $L_2[-\pi, \pi]$ (véase el p. 57.10). Esto fue demostrado en el lema 1 del p. 55.1.

De las fórmulas (55.4) proviene que $\|\operatorname{sen} nx\| = \sqrt{\pi}$, $\|\cos nx\| = \sqrt{\pi}$, $n = 1$,

*) J. P. Gram (1850 — 1916), matemático danés.

2, . . . , por lo cual el sistema ortonormalizado, correspondiente al sistema (58.2), tiene por expresión

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} nx \ldots.$$

2. Los polinomios

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{58.3}$$

llevan el nombre de *Legendre*. De la fórmula (58.3) se ve que $P_n(x)$ es un polinomio de grado n:

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{n!}x^n + \ldots$$

Mostremos que el sistema (58.3) es ortogonal en el espacio $L_2[-1, 1]$. Con este fin demostremos una afirmación más general, a saber, el polinomio de Legendre $P_n(x)$ es ortogonal a todo polinomio $Q_m(x)$ de grado $m < n$. Al notar previamente que la expresión

$$\frac{d^k(x^2-1)^n}{dx^k}$$

se anula, para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, en los puntos $x = -1$ y $x = 1$ tenemos, integrando por partes:

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x)\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}dx = Q_m(x)\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\Bigg|_{-1}^{1} -$$

$$-\int_{-1}^{1} Q_m'(x)\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}dx = \ldots = (-1)^m Q_m^{(m)}(x)\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-m}(x^2-1)^n}{dx^{n-m}}dx =$$

$$= (-1)^m Q_m^{(m)}(x)\frac{d^{n-m-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-m-1}}\Bigg|_{-1}^{1} = 0.$$

De este modo

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x)P_n(x)dx = 0, \quad m < n;$$

en particular

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0, \quad m \neq n.$$

Calculemos ahora la norma de los polinomios de Legendre. Al observar que

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{n!}x^n + Q_{n-1}(x),$$

donde $Q_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado no superior a $n-1$, y hacer uso de la

ortogonalidad de $P_n(x)$ respecto de todos los polinomios de grado inferior, obtendremos:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)dx = \int_{-1}^{+1} P_n(x)\left[\frac{(2n-1)!!}{n!}x^n + Q_{n-1}(x)\right]dx =$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{n!}\int_{-1}^{1} P_n(x)x^n dx = \frac{(2n-1)!!}{n!(2n)!!}\int_{-1}^{1}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}x^n dx.$$

Integrando sucesivamente por partes, tendremos

$$\int_{-1}^{+} P_n^2(x)dx = \ldots = (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_{-1}^{1} x d(x^2-1)^n =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{n-1}x^2dx =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{n-1}d(x^3) =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n-4)!!}\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{n-2}x^4dx = \ldots$$

$$\ldots = \int_{-1}^{1} x^{2n}dx = \frac{2}{2n+1}.$$

De este modo,

$$\|P_n(x)\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

El sistema de polinomios de Legendre, al igual que cualquier sistema ortogonal de elementos no nulos, es linealmente independiente (véase el lema 1) en el espacio $L_2[-1, 1]$. Por cuanto el sistema de funciones que se considera se compone aquí de los polinomios, la independencia lineal de éstos en un segmento (en el caso dado, en el segmento $[-1, 1]$) predetermina su independencia lineal en cualquier otro segmento.

En efecto, si ciertos polinomios $Q_1(x), \ldots, Q_k(x)$ son linealmente independientes en el segmento $[a, b]$, entonces, evidentemente, son linealmente independientes también en todo el eje numérico (todo sistema de funciones, linealmente independiente en cierto conjunto, es linealmente independiente también en cualquier conjunto mayor en el cual están definidas todas las funciones del sistema en consi-

deración). Si los polinomios $Q_1(x), \ldots, Q_k(x)$ resultaran ser linealmente dependientes en cierto segmento $[\alpha, \beta]$, es decir, si se encontraran tales números $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, no todos iguales a cero, que para cualquier $x \in [\alpha, \beta]$ se verificase la igualdad $\lambda_1 Q_1(x) + \ldots + \lambda_k Q_k(x) = 0$, esto significaría que todos los coeficientes del polinomio $\lambda_1 Q_1(x) + \ldots + \lambda_k Q_k(x)$ son nulos (un polinomio con los coeficientes distintos de cero puede tener sólo un número finito de ceros). Esto es indicio de que los polinomios $Q_1(x), \ldots, Q_k(x)$ son linealmente dependientes en todo el eje numérico. La contradicción obtenida demuestra su independencia lineal en el segmento $[\alpha, \beta]$.

De la independencia lineal de los polinomios de Legendre proviene que todo polinomio de grado no superior a n, es una combinación lineal de los polinomios de Legendre $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$. En efecto, en un espacio $(n + 1)$-dimensional de los polinomios cuyos grados no sobrepasan n cualquier sistema de $n + 1$ polinomios linealmente independientes, en particular, el sistema citado de polinomios de Legendre, forma una base. Por eso todo polinomio de grado mencionado es una combinación lineal de elementos del sistema indicado.

3. El sistema de funciones $\{e^{inx}\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, es ortogonal en el segmento $[-\pi, \pi]$.

En efecto,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\overline{e^{imx}}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}\,dx.$$

De aquí, recordando que el período de la función e^z es igual a $2\pi i$ (véase el p. 37.6), para $n \neq m$ obtenemos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\overline{e^{imx}}\,dx = \frac{1}{i(n-m)} e^{i(n-m)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Ejercicio 4. Demuéstrese que la sucesión de funciones $\operatorname{sen}(2n-1)\frac{x}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$, forma un sistema ortogonal en el segmento $[0, \pi]$.

58.2. ORTOGONALIZACIÓN

Supongamos nuevamente que X es un espacio prehilbertiano. Consideremos el problema siguiente. Sea dado un sistema numerable linealmente independiente de elementos x_n, $n = 1, 2, \ldots$, del espacio X. Se requiere obtener del sistema dado, con ayuda de combinaciones lineales finitas, un sistema ortogonal. Resulta que este problema siempre tiene solución.

Teorema 1. *Sea*

$$x_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{58.4}$$

un sistema linealmente independiente de elementos del espacio X. Existe tal sistema ortogonal de elementos y_n, $y_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, de este espacio que cualquiera de sus elementos y_n, $n = 1, 2, \ldots$, es una combinación lineal de los primeros n elementos del sistema (58.4):

$$y_n = \alpha_{n,1}x_1 + \alpha_{n,2}x_2 + \ldots + \alpha_{n,n}x_n. \tag{58.5}$$

La construcción del sistema ortogonal $\{y_n\}$ del tipo (58.5), partiendo del sistema linealmente independiente $\{x_n\}$, se denomina, corrientemente, *proceso de ortogonalización del sistema* $\{x_n\}$.

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $y_1 = x_1$. Por cuanto el sistema (58.4) es linealmente independiente, entonces $y_1 \neq 0$ (¿por qué?).

Supongamos que existen elementos ortogonales dos a dos $y_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots, k$, $k \geqslant 1$, que satisfacen la condición (58.5). Buscaremos un elemento y_{k+1}, que sea ortogonal a todos los $y_1, \ldots, y_k$, en la forma

$$y_{k+1} = \beta_{k+1,1}y_1 + \ldots + \beta_{k+1,k}y_k - x_{k+1}. \tag{58.6}$$

De las condiciones de ortogonalidad

$$(y_1, y_{k+1}) = \ldots = (y_k, y_{k+1}) = 0 \tag{58.7}$$

obtenemos

$$(y_1, y_1)\beta_{k+1,1} = (y_1, x_{k+1}), \ldots, (y_k, y_k)\beta_{k+1,k} = (y_k, x_{k+1}). \tag{58.8}$$

De aquí se determinan unívocamente los coeficientes $\beta_{k+1,i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. El elemento y_{k+1}, prescrito por la representación (58.6) con los coeficientes determinados $\beta_{k+1,i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, satisface las condiciones (58.7).

Sustituyamos en (58.6) las expresiones para y_n, $n = 1, 2, \ldots, k$ escritas en la forma (58.5); realizada la reducción de los términos semejantes, se obtiene

$$y_{k+1} = \alpha_{k+1,1}x_1 + \ldots + \alpha_{k+1,k}x_k - x_{k+1}. \tag{58.9}$$

De aquí proviene que $y_{k+1} \neq 0$, pues de lo contrario los elementos $x_1, \ldots, x_{k+1}$ resultarían ser linealmente dependientes. □

OBSERVACIÓN. Indiquemos que si un sistema ortogonal de elementos z_n, $z_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, del espacio X es de tal índole que todo elemento z_n es también una combinación lineal de los primeros n elementos del sistema (58.4):

$$z_n = \gamma_{n,1}x_1 + \ldots + \gamma_{n,n}x_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{58.10}$$

entonces el elemento z_n puede diferir del elemento y_n sólo en cierto factor numérico $\lambda_n \neq 0$:

$$z_n = \lambda_n y_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Demostremos esto. Designemos mediante $L(u_1, \ldots, u_n)$ la cápsula lineal del sistema de elementos $u_1, \ldots, u_n$ (véase el p. 57.2); $L(x_1, \ldots, x_n)$ será un espacio n-dimensional en el cual los elementos $x_1, \ldots, x_n$ forman la base (véase el p. 57.2). Los elementos y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ (z_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, respectivamente) son linealmente independientes y están contenidos en $L = (x_1, \ldots, x_n)$; por consiguiente, los elementos y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ y los z_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, forman también una base en el espacio $L(x_1, \ldots, x_n)$. De este modo, $L(x_1, \ldots, x_n) = L(y_1, \ldots, y_n) = L(z_1, \ldots, z_n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

El elemento $y_n \in L(x_1, \ldots, x_n)$ es ortogonal al subespacio $L(y_1, \ldots, y_{n-1}) = L(x_1, \ldots, x_{n-1})$, es decir, ortogonal a todo elemento de este subespacio. Mientras tanto, el elemento $z_n \in L(x_1, \ldots, x_n)$ es ortogonal al subespacio $L(x_1, \ldots, z_{n-1}) = L(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Así pues, los elementos y_n y z_n del espa-

cio n-dimensional $L(x_1, \ldots, x_n)$ son ortogonales a un mismo subespacio $(n-1)$-dimensional $L(x_1, \ldots, x_{n-1})$ y, por ende, son colineales: $z_n = \lambda_n y_n$, $\lambda_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ (¿por qué?).

Diremos también que de

$$L(x_1, \ldots, x_n) = L(y_1, \ldots, y_n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

se infiere la coincidencia de las cápsulas lineales de los sistemas *infinitos* (58.4) y (58.5).

Analicemos ahora el sistema de potencias de x:

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots . \tag{58.11}$$

Este sistema es linealmente independiente en cualquier segmento (finito o infinito). Efectivamente, si

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_n x^n \equiv 0, \tag{58.12}$$

entonces, derivando esta identidad n veces, obtendremos

$$n!\lambda_n = 0,$$

es decir, $\lambda_n = 0$.

Si ya ha sido demostrado que $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$, la identidad (59.12) toma la forma

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_k x^k = 0.$$

Derivándola k veces, obtendremos $\lambda_k = 0$. Así pues, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, lo que precisamente significa la independencia lineal de las funciones $1, x, \ldots, x^n$.

Ha de notarse que por cuanto las funciones del sistema (58.11), que se consideran en cierto segmento $[a, b]$, pertenecen a los espacios $C[a, b]$ (véase el ejemplo 7 en el p. 57.4), $CL_2[a, b]$ y $L_2[a, b]$ (véase el p. 57.10), entonces en dichos espacios se tienen sistemas linealmente independientes infinitos. Por consiguiente, los espacios citados son de dimensión infinita, es decir, a ciencia cierta no tienen base compuesta de un número finito de elementos.

Tomemos el sistema (58.11) en el segmento $[-1, 1]$ a título de sistema de partida (58.4) y apliquemos a (58.11) el proceso de ortogonalización (véase (58.5)) en el espacio $L_2[-1, 1]$; en este caso obtendremos una sucesión de polinomios ortogonales de grados $0, 1, 2, \ldots$, respectivamente. De la observación aducida más arriba se deduce que estos polinomios pueden diferir de los de Legendre (58.3), también ortogonales, sólo en un factor constante.

58.3. SISTEMAS COMPLETOS. COMPLETITUD DEL SISTEMA TRIGONOMÉTRICO Y DEL SISTEMA DE LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE

Recordemos (véase el p. 57.6) que un sistema de elementos $\Omega = \{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, se llama *completo en el espacio seminormalizado* X, si el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de sus elementos es denso en el espacio X en el sentido de la seminorma prescrita en él. En otras palabras, un sistema es completo, si para todo $x \in X$ y cualquier $\varepsilon > 0$ existen tales elementos $x_{\alpha_k} \in \Omega$ y números λ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, que

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{\alpha_k} \right\| < \varepsilon.$$

Definición 3. *Un espacio seminormalizado X se denomina encajado en el espacio seminormalizado Y, si*

1°) $X \subset Y$;

2°) *existe una constante $c > 0$ tal que para todo $x \in X$ tiene lugar la desigualdad*

$$\|x\|_Y \leqslant c\|x\|_X.$$

La constante $c > 0$ se llama *constante de encaje*. El encaje del espacio X en el espacio Y se designa mediante el símbolo

$$X \Subset Y.$$

Es fácil comprobar que si $X \Subset Y$ e $Y \Subset Z$, entonces $X \Subset Z$. Del lema 3, el p. 57.4, se desprende que para cualquier segmento tienen lugar los encajes

$$RL_p[a, b] \Subset RL_1[a, b],$$

$$RL_p[a, b] \cap S[a, b] \Subset RL_p[a, b], \quad 1 \leqslant p < +\infty.$$

Aquí, en el segundo encaje el espacio $RL_p[a, b] \cap S[a, b]$ se considera con la norma $\|\cdot\|_\infty$, es decir, con la del espacio $S[a, b]$. Si nos limitamos solamente a las funciones continuas, entonces del segundo encaje se desprende un encaje

$$C[a, b] \Subset CL_p[a, b], \quad 1 \leqslant p < +\infty. \tag{58.13}$$

De aquí, recordando que para $p = 2$ el espacio $CL_2[a, b]$ se encaja isométricamente en el espacio $L_2[a, b]$ (véase (57.52)) obtenemos un encaje más

$$C[a, b] \Subset L_2[a, b]. \tag{58.14}$$

Fijemos la atención en que en los encajes (58.13) y (58.14) los espacios que se encajan son densos en los espacios donde vienen encajados: en el caso (58.13) esto proviene de que los conjuntos de puntos de ambos espacios coinciden y en el caso (58.14), del teorema 6 del p. 57.10.

Lema 3. *Si un sistema $\Omega = \{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, es completo en el espacio seminormalizado X, el espacio X está encajado en el espacio seminormalizado Y y el conjunto X es denso en el espacio Y según la seminorma de éste, entonces el sistema Ω será denso en el espacio Y.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos un elemento arbitrario $y \in Y$ y cualquier $\varepsilon > 0$. Por ser el conjunto X denso, en el espacio X se encontrará un elemento $x \in X$ tal que

$$\|y - x\|_Y < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por cuanto el sistema Ω es completo en el espacio X, existe un conjunto finito de elementos $x_{\alpha_k} \in \Omega$ y números λ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, tales que

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{\alpha_k} \right\|_X < \frac{\varepsilon}{2c},$$

donde $c > 0$ es una constante del encaje $X \Subset Y$. En virtud de este encaje (véase la definición 3)

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{\alpha_k} \right\|_Y \leq c \left\| x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{\alpha_k} \right\|_X < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por eso, para el elemento y, elegido inicialmente, obtendremos

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{\alpha_k} \right\|_Y \leq \| y - x \|_Y + \left\| x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{\alpha_k} \right\|_Y < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto es precisamente el indicio de que el sistema Ω es denso en el espacio Y. □

EJEMPLOS. 1. Un sistema de potencias

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots \tag{58.15}$$

es completo en los espacios $C[a, b]$, $CL_p[a, b]$, $1 \leq p < +\infty$, y $L_2[a, b]$ para cualquier segmento $[a, b]$. En efecto, en virtud del teorema de Weierstrass (véase el teorema 8′ en el p. 55.8), el citado sistema de potencias es completo en el espacio $C[a, b]$ que está encajado, de acuerdo con (58.14), en el espacio $L_2[a, b]$ y es denso en éste. Por ello, de conformidad con el lema 3 de este punto, el sistema de potencias (58.15) es completo en el espacio $L_2[a, b]$. Según este mismo lema, el sistema mencionado es completo también en el espacio $CL_p[a, b]$ para cualquier $p \geq 1$, pues, $C[a, b]$ está encajado en $CL_p[a, b]$ y es denso en él (véase (58.13)).

Subrayemos que toda base en un espacio lineal normalizado es, evidentemente, un sistema completo linealmente independiente. Lo recíproco no es cierto. Por ejemplo, aunque el sistema de potencias (58.15) forma un sistema completo linealmente independiente en el espacio de Banach $C[a, b]$, no es, sin embargo, una base en él: si una función f en el espacio $C[a, b]$ se desarrolla según el sistema de potencias (58.15), es decir, si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, esto implica que la serie de potencias escrita converge uniformemente en el segmento $[a, b]$, y, por lo tanto, la función f es analítica en el intervalo (a, b). Por esta razón, a ciencia cierta, ninguna función continua en el segmento $[a, b]$ puede ser representada en la forma indicada.

2. Un sistema de los polinomios de Legendre

$$P_0(x) = 1, P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \tag{58.3}$$

es completo en los espacios $C[a, b]$, $CL_p[a, b]$, $1 \leq p < +\infty$ y $L_2[a, b]$ para cualquier segmento $[a, b]$. Esto se infiere inmediatamente de que todo polinomio $Q(x)$ es una combinación lineal de los polinomios de Legendre (véase el p. 58.1):

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x). \tag{58.16}$$

Por eso, si en algún espacio seminormalizado X es completo el sistema de potencias (58.15), es decir, para todo elemento $f \in X$ y cualquier $\varepsilon > 0$ existe un polinomio $Q = Q(x)$ tal que $\| f - Q \| < \varepsilon$, entonces, en virtud de (58.16),

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k \right\| < \varepsilon.$$

Esto es precisamente el testimonio de que el sistema de los polinomios de Legendre es completo en el espacio X.

3. Designemos con $C^*[-\pi, \pi]$ un subespacio del espacio de funciones continuas $C[-\pi, \pi]$, compuesto de las funciones que en los extremos del segmento $[-\pi, \pi]$ toman valores iguales:

$$f(-\pi) = f(\pi). \tag{58.17}$$

El sistema trigonométrico

$$1, \cos x, \operatorname{sen} x, \ldots, \cos nx, \operatorname{sen} nx, \ldots, \tag{58.2}$$

es completo en los espacios $C^*[-\pi, \pi]$ y $L_2[-\pi, \pi]$. La completitud del sistema trigonométrico en el espacio $C^*[-\pi, \pi]$ ha sido demostrada anteriormente: véase el teorema 7′ en el p. 55.8.

Denotemos con $\mathring{C}[-\pi, \pi]$ un subespacio del espacio $C^*[-\pi, \pi]$, compuesto de aquellas funciones f que en los extremos del segmento $[-\pi, \pi]$ toman valores nulos: $f(-\pi) = f(\pi) = 0$. De acuerdo con el teorema 6, p. 57.10, el conjunto $\mathring{C}[-\pi, \pi]$, y, por ende, también el espacio $C^*[-\pi, \pi] \supset \mathring{C}[-\pi, \pi]$, es denso en el espacio $L_2[-\pi, \pi]$. Por esta razón, en virtud del encaje (véase (58.14))

$$C^*[-\pi, \pi] \Subset L_2[-\pi, \pi]$$

y del lema 3 de este punto, el sistema trigonométrico (58.2) es completo en el espacio $L_2[-\pi, \pi]$.

Diremos que por cuanto la condición (58.17) se conserva en el caso de convergencia uniforme y todo polinomio trigonométrico satisface a esta condición, entonces el sistema trigonométrico no es completo, a ciencia cierta, en el espacio $C[-\pi, \pi]$, puesto que éste contiene a todas luces funciones que no satisfacen la condición (58.17).

Como un corolario se desprende de los ejemplos considerados la siguiente afirmación.

Teorema 2. *El espacio de Banach* $C[a, b]$ *y el de Hilbert* $L_2[a, b]$ *son espacios separables.*

Efectivamente, la separabilidad de un espacio significa (véase la definición 31 en el p. 57.6) que en dicho espacio está presente un sistema numerable completo. En los espacios de Banach y de Hilbert en calidad de tal sistema interviene el sistema (58.15) de potencias enteras no negativas de la variable x.

58.4. SERIES DE FOURIER

Sea, al igual que hasta ahora, X un espacio prehilbertiano. Consideremos el siguiente problema. Sea dado un sistema de n vectores linealmente independientes $e_1, e_2, \ldots, e_n$ del espacio X y sea fijado un cierto vector $x \in X$. Se requiere hallar una

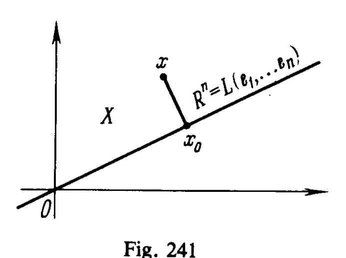


Fig. 241

combinación lineal de la forma

$$a_1e_1 + \ldots + a_ne_n, \tag{58.18}$$

la que ofrece la mejor aproximación en el espacio X del elemento x, es decir, realiza el mínimo de la expresión

$$\|x - (a_1e_1 + \ldots + a_ne_n)\|, \tag{58.19}$$

o, que es lo mismo, el mínimo de la función

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{n} a_ke_k\right\|^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{n} a_ke_k, x - \sum_{k=1}^{n} a_ke_k\right) \tag{58.20}$$

de las variables $a_1, \ldots, a_n$.

En el lenguaje geométrico esto significa que en un espacio n-dimensional $R^n = L(e_1, \ldots, e_n)$ tendido sobre los vectores $e_1 \in X, \ldots, e_n \in X$ se busca un elemento que sea menos alejado del elemento dado $x \in X$.

Si el espacio X es n-dimensional y, por consiguiente, los vectores $e_1, \ldots, e_n$ forman una base, siempre pueden elegirse tales coeficientes a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, que se cumpla la igualdad

$$x = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n \tag{58.21}$$

y, por lo tanto, la expresión (58.19) se reduzca a cero. En cambio, si X no es de dimensión finita o es de dimensión finita, pero su dimensión es superior a n, entonces la igualdad (58.21), en el caso general, no es posible de realizarla y el problema consiste en la búsqueda de una combinación lineal (58.18) que dé el valor mínimo a la expresión (58.19).

Mostremos que el problema enunciado siempre tiene una solución x_0 que es única y, además, aclaremos algunas propiedades de esta solución (véase la fig. 241, en la que está expuesto esquemáticamente el problema en consideración). Al emplear, si es necesario, el proceso de ortogonalización (véase el p. 58.2), siempre podemos sustituir el sistema $e_1, \ldots, e_n$ por un sistema ortogonal de vectores distintos de cero. Por eso supondremos que $e_k \neq 0$, $(e_k, e_j) = 0$, $k \neq j$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$. Haciendo uso de la condición de ortogonalidad, transformemos la función (58.20) del modo siguiente:

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{n} a_ke_k\right\|^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{n} a_ke_k, x - \sum_{j=1}^{n} a_je_j\right) =$$

$$= (x, x) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_ka_j(e_k, e_j) - 2\sum_{k=1}^{n} a_k(x, e_k) =$$

$$= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2\|e_k\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k(x, e_k) =$$

$$= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k\|e_k\| - \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|}\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x, e_k)^2}{\|e_k\|^2}, \tag{58.22}$$

De aquí se desprende*) que el mínimo de la expresión (58.19) se alcanza cuando

$$a_k\|e_k\| - \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

es decir, cuando

$$a_k = \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2}. \tag{58.23}$$

Los números a_k, definidos por la fórmula (58.23), *se denominan coeficientes de Fourier del elemento x según el sistema $e_1, \ldots, e_n$.*

Si el sistema $e_1, \ldots, e_n$ es ortonormalizado, las fórmulas (58.23) adquieren una forma más sencilla:

$$a_k = (x, e_k). \tag{58.24}$$

En el caso de un espacio n-dimensional, cuando a título de vectores $e_1, \ldots, e_n$ está elegida la base del espacio, los coeficientes de Fourier del vector x son los coeficientes de su desarrollo según la base citada, es decir, las coordenadas del elemento x respecto de esta base. Resulta fácil convencerse de esto, al multiplicar escalarmente la igualdad (58.21) por e_k, $k = 1, 2, \ldots, n$: como resultado se obtendrá (58.23).

Volveremos ahora a la expresión (58.22). Al tomar en ella, a título de $a_1, \ldots, a_n$, los coeficientes de Fourier (58.23), obtendremos

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2\|e_k\|^2 = \left\|x - \sum_{k=1}^{n} a_ke_k\right\|^2 \geqslant 0. \tag{58.25}$$

de donde

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2\|e_k\|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{58.26}$$

Así pues, queda demostrado el siguiente teorema.

Teorema 3. *Supongamos que e_k, $e_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, es un sistema ortogonal de vectores del espacio prehilbertiano X. La mejor aproximación en el espacio X del vector $x \in X$ por medio de las combinaciones lineales del tipo $\sum_{k=1}^{n} \alpha_ke_k$ se*

*) Es obvio que estos razonamientos son una generalización inmediata de la demostración del teorema 11 del p. 55.9.

efectúa cuando α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, *son coeficientes de Fourier:* $\alpha_k = a_k$. *En este caso*

$$\inf_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2 \geqslant 0.$$

Corolario 1. *El elemento* $x_0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$ *es el de mejor aproximación del elemento* $x \in X$ *en el subespacio* $L(e_1, \ldots, e_n)$ *cuando, y sólo cuando, el elemento* $x - x_0$ *sea ortogonal a* $L(e_1, \ldots, e_n)$, *es decir, cuando* $x - x_0 \perp L(e_1, \ldots, e_n)$.

Efectivamente, la condición $x - x_0 \perp L(e_1, \ldots, e_n)$ es equivalente a la otra: para todos los $k = 1, 2, \ldots, n$ se verifica la igualdad $(x - x_0, e_k) = 0$. Esta, a su vez, es equivalente a la condición $(x, e_k) = (x_0, e_k)$, o bien, por cuanto

$$(x_0, e_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j, e_k \right) = \alpha_k (e_k, e_k),$$

a la condición $(x, e_k) = \alpha_k (e_k, e_k)$. De este modo, las condiciones

$$x - x_0 \perp L(e_1, \ldots, e_n) \quad \text{y} \quad \alpha_k = \frac{(x, e_k)}{(e_k, e_k)}$$

son equivalentes. Mas, la segunda condición significa que los números α_k son coeficientes de Fourier del elemento x_0, es decir, x_0 es el elemento de la mejor aproximación. □

Sea dada ahora una sucesión (no el sistema finito, como antes) de elementos

$$e_n (e_n \neq 0), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{58.27}$$

que forman un sistema ortogonal en el espacio X. Los números a_k, $k = 1, 2, \ldots$, determinados por la fórmula (58.23) se llamarán en este caso también *coeficientes de Fourier* del elemento y según el sistema (58.27).

Definición 4. *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \tag{58.28}$$

donde a_n, $n = 1, 2, \ldots$ *son los coeficientes de Fourier* (58.23) *del elemento* x *según el sistema* (58.27), *se llama serie de Fourier del elemento* x *según dicho sistema.*

Si la serie (58.28) es la de Fourier del elemento x, se escribe

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n.$$

Definición 5. *Sean dados un sistema ortogonal* (58.27) *y un elemento* $x \in X$. *Se denomina la mejor aproximación del elemento* x *por medio de las combinaciones lineales del tipo* $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_n$ *(n está fijo) al número* $E_n(x)$ *determinado por la igualdad*

$$E_n(x) = \inf_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

donde la cota inferior se toma según toda clase de coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, *o, que es lo mismo, según toda clase de combinaciones lineales del tipo* $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$.

Por cuanto toda combinación lineal de elementos $e_1, \ldots, e_n$ puede considerarse también como una combinación lineal de elementos $e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}$, entonces, evidentemente,

$$E_{n+1}(x) \leqslant E_n(x). \tag{58.29}$$

Del teorema 3 se infiere que la cota inferior de que se trata se alcanza, si a título de coeficientes α_k se toman los coeficientes de Fourier y que

$$E_n(x) = \inf_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2},$$

$$a_k = \frac{(x, e_k)}{(e_k, e_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{58.30}$$

El resultado obtenido lo enunciemos en forma del corolacio del teorema 3.

Corolario 2. *Las sumas parciales*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

de la serie de Fourier del elemento $x \in X$ *realizan la mejor aproximación en el espacio* X *del elemento* $x \in X$ *por medio de las combinaciones lineales del tipo* $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$.

Demos a conocer algunos otros corolarios del teorema 3.

Corolario 3. *Si* s_n *es la suma parcial de la serie de Fourier del elementos* $x \in X$, *la sucesión numérica* $\|x - s_n\|$ *decrece:*

$$\|x - s_{n+1}\| \leqslant \|x - s_n\|, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{58.31}$$

Efectivamente, de acuerdo con (58.30),

$$\|x - s_n\| = E_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Por ello la desigualdad (58.31) es, de hecho, la desigualdad (58.29) escrita en otras designaciones.

Corolario 4. *Para los coeficientes de Fourier* a_n, $n = 1, 2, \ldots$, *de todo elemento* $x \in X$ *se verifica la desigualdad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|e_n\|^2 \leqslant \|x\|^2 \tag{58.32}$$

llamada desigualdad de Bessel.

La desigualdad (58.32) proviene directamente de la (58.26) cuando $n \to \infty$ (compárese con la desigualdad (55.49) en el p. 55.9).

Corolario 5. *Si existe una constante $c > 0$ tal que $\|e_n\| \geqslant c$ cuando $n = 1, 2, \ldots$, en particular, si el sistema* (58.27) *es ortonormalizado (en este caso se puede tomar $c = 1$), entonces los coeficientes de Fourier de cualquier elemento $x \in X$ tienden a cero cuando $n \to \infty$*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0. \tag{58.33}$$

Esto se deduce de la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leqslant \frac{1}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|e_n\|^2 \leqslant \frac{\|x\|^2}{c^2},$$

pues el término general de una serie convergente tiende a cero.

Surge naturalmente una cuestión: ¿bajo qué condiciones converge la serie de Fourier del elemento x?

Teorema 4. *Si el espacio X es de Hilbert (es decir, es completo), la serie de Fourier* (58.28) *de cualquier elemento $x \in X$ según todo sistema ortogonal* (58.27) *converge en el espacio X. Si x_0 es la suma de la serie:*

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \tag{58.34}$$

el elemento $x - x_0$ es ortogonal a todos los elementos del sistema (58.27).

DEMOSTRACIÓN. Sean $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$, $n = 1, 2, \ldots$, las sumas parciales de la serie de Fourier (58.28) del elemento x según el sistema (58.27); entonces

$$\|s_{n+p} - s_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \right\|^2 =$$

$$= \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k, \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \right) = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 \|e_k\|^2,$$

$$n = 1, 2, \ldots, p = 1, 2, \ldots. \tag{58.35}$$

En virtud de la desigualdad de Bessel (58.32) la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|e_n\|^2$$

converge y, por lo tanto, en virtud del criterio de Cauchy para la convergencia de una serie numérica, existe, para cada número $\varepsilon > 0$, tal número n_ε que, siendo $n \geqslant n_\varepsilon$ y $p > 0$, se verifica la desigualdad

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 \|e_k\|^2 < \varepsilon^2,$$

por lo cual, de acuerdo con la desigualdad (58.35) para $n \geqslant n_\varepsilon$ y $p > 0$, tenemos

$$\|s_{n+p} - s_n\| < \varepsilon,$$

es decir, la sucesión $\{s_n\}$ es fundamental en el espacio X y, por cuanto este último es completo, converge.

En las condiciones del teorema la sucesión s_n converge, en el caso general, no hacia el elemento x. Supongamos que su límite es el elemento x_0, es decir, $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, entonces, haciendo uso de la continuidad del producto escalar (véase el p. 57.9) y la fórmula (58.23), obtendremos

$$(x - x_0, e_k) = (x, e_k) - (x_0, e_k) =$$

$$= (x, e_k) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, e_k \right) = (x, e_k) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e_n, e_k) =$$

$$= (x, e_k) - a_k \|e_k\|^2 = 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \ \square$$

En lo que se refiere a la condición de convergencia de la serie de Fourier *de cierto elemento suelto* hacia este mismo elemento, puede formularse en la forma siguiente.

Teorema 5. *La serie de Fourier* (58.28) *del elemento x de un espacio prehilbertiano converge hacia este elemento cuando, y sólo cuando, para dicha serie se cumple la igualdad*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|e_n\|^2, \tag{58.36}$$

donde a_n son coeficientes de Fourier del elemento x según el sistema (58.27).

La igualdad (58.36) lleva el nombre de *Parseval.*

En el caso en que el sistema (58.27) sea ortonormalizado, la igualdad de Parseval toma una forma más sencilla:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \ a_n = (x, e_n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

y representa en sí una generalización del teorema de Pitágoras a los espacios de dimensión infinita.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 5. Tuvimos (véase (58.25))

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2.$$

Pasando aquí al límite para $n \to \infty$, obtendremos la equivalencia de la condición

$$\lim_{n \to \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| = 0 \tag{58.37}$$

y de la condición

$$\lim_{n \to \infty} \left(\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2 \right) = 0,$$

es decir, de la condición

$$\|x\|^2 = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2. \square \tag{58.38}$$

Recordemos ahora el concepto de sistema completo (véase el p. 57.6), aplicado sólo al caso de sistemas numerables. El sistema de elementos $e_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, se llama completo, si el conjunto de combinaciónes lineales finitas de elementos de este sistema es denso en el espacio X. Esto significa que para todo elemento $x \in X$ y todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $n = n(\varepsilon, x)$ y los números $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tales que se verifica la desigualdad

$$\|x - (\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n)\| < \varepsilon. \tag{58.39}$$

La completitud del sistema ortonormalizado constituye una condición que asegura la convergencia de la serie de Fourier de *cualquier elemento* del espacio hacia este mismo elemento. Enunciemos esta condición en forma de un teorema.

Teorema 6. *Una serie de Fourier de cualquier elemento de un espacio prehilbertiano según el sistema ortogonal* (58.27) *converge hacia este mismo elemento cuando, y sólo cuando, el sistema* (58.27) *es completo.*

Corolario. *Para que el sistema ortogonal* (58.27) *de un espacio prehilbertiano X sea completo en el espacio X, es necesario y suficiente que para cualquier elemento $x \in X$ se verifique la igualdad de Parseval* (58.36).

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 6. Sea X un espacio prehilbertiano y supongamos que el sistema (58.27) es el sistema ortogonal de dicho espacio. Si para cualquier $x \in X$ su serie de Fourier según el sistema (58.27) converge hacia x, es decir,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \quad \text{donde} \quad a_n = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{58.40}$$

entonces

$$\lim_{n \to \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| = 0. \tag{58.41}$$

Por consiguiente, para cada número $\varepsilon > 0$ existe tal suma parcial $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$ de la serie de Fourier (58.28), que

$$\|x - s_n\| < \varepsilon, \tag{58.42}$$

es decir, se cumple la condición (58.39)

Viceversa, si la condición (58.39) se cumple para algunos coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, se cumple también a ciencia cierta, de acuerdo con el teorema 3, en el caso en que se toma $\lambda_1 = a_1, \ldots, \lambda_n = a_n$, es decir, en este caso para $\varepsilon > 0$ dado se cumple la condición (58.42) con cierto n, y, por ende, con cualesquiera $m > n$ (véase (58.31)), lo que es equivalente al cumplimiento de la condición (58.41). $\square$

El corolario proviene directamente de los teoremas 5 y 6.

Aclaremos ahora la cuestión sobre la unicidad de un elemento que en calidad de su serie de Fourier tiene la serie dada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$.

Teorema 7. *Si el sistema ortogonal* (58.27) *de un espacio prehilbertiano X es completo, el elemento $x \in X$, cuyos coeficientes de Fourier según el sistema* (58.27) *son todos iguales a cero, es por sí mismo nulo.*

Corolario. *Si dos elementos del espacio X según el sistema ortogonal completo* (58.27) *tienen todos los coeficientes de Fourier iguales entonces son iguales los propios elementos.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 7. Si el sistema (58.27) es completo, entonces, de acuerdo con el teorema 6, cualquier elemento $x \in X$ interviene como suma de su serie de Fourier: $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Por ello, si $a_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces también $x = 0$.

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Si $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ y si, además, sus coeficientes de Fourier son iguales entre sí:

$$\frac{(x_1, e_n)}{\|e_n\|^2} = \frac{(x_2, e_n)}{\|e_n\|^2}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

entonces para el elemento $x = x_1 - x_2$ todos los coeficientes de Fourier son nulos:

$$\frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2} = \frac{(x_1 - x_2, e_n)}{\|e_n\|^2} = \frac{(x_1, e_n)}{\|e_n\|^2} - \frac{(x_2, e_n)}{\|e_n\|^2} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

y, por lo tanto, de acuerdo con el teorema, $x = 0$, es decir, $x_1 = x_2$. $\square$

OBSERVACIÓN. Conviene notar que si en un espacio prehilbertiano X está dado cierto sistema ortogonal $\{e_n\}$, $e_n \neq 0$, y para cierto $x \in X$ existe una representación suya en la forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n,$$

será única y los coeficientes x_n, $n = 1, 2, \ldots$, son los de Fourier. En efecto, si la representación citada existe, para todo $m = 1, 2, \ldots$, obtenemos, en virtud de la ortogonalidad del sistema $\{e_n\}$:

$$(x, e_m) \doteq \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n, e_m \right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n (e_n, e_m) = x_m (e_m, e_m),$$

de donde

$$x_m = \frac{(x, e_m)}{(e_m, e_m)},$$

es decir, los coeficientes x_m, $m = 1, 2, \ldots$ se determinan unívocamente y coinciden con los coeficientes de Fourier.

Así pues, si en un espacio prehilbertiano se tiene un sistema ortogonal completo, todo elemento de este espacio se desarrolla en serie según dicho sistema (teorema 6)

y, además, de conformidad con la observación citada, de modo único. En otras palabras (véase la definición 33 en el p. 57.6), *todo sistema ortogonal completo* $\{e_n\}$, $e_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *en particular, todo sistema completo ortonormalizado de un espacio prehilbertiano constituye la base de éste.*

Por ejemplo, con arreglo a los resultados del p. 58.3, los polinomios de Legendre (58.3) forman la base en el espacio de Hilbert $L_2[-1, 1]$, mientras que el sistema trigonométrico (58.2), la base en el espacio de Hilbert $L_2[-\pi, \pi]$.

Demos a conocer ahora otro enfoque al concepto de completitud del sistema ortogonal en un espacio completo.

Definición 6. *El sistema ortogonal* (58.27) *se denomina cerrado, si en el espacio X no existe un elemento distinto de cero y ortogonal a cualquiera de los elementos del sistema* (58.27).

Teorema 8. *Si el espacio X es completo, el sistema ortogonal* (58.27) *será completo cuando, y sólo cuando, sea cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Si el sistema (58.27) es completo, $x \in X$ y x es ortogonal a todos los elementos del sistema (58.27), entonces todos sus coeficientes de Fourier según el sistema (58.27) son nulos (véase (58.23)), por consiguiente (teorema 7), $x = 0$.

Viceversa, sea el sistema (58.27) cerrado, $x \in X$ y $x \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. De acuerdo con el teorema 4, la serie de Fourier del elemento x converge, y si $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, entonces $x - x_0 \perp e_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Por ello, debido a que el sistema (58.27) es cerrado, $x - x_0 = 0$, es decir, $x = x_0$ y $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Por cuanto x es un elemento arbitrario del espacio X, de aquí proviene, en virtud del teorema 6, la completitud del espacio (58.27). □

Problema 39. Aclárese si son equivalentes o no el concepto de sistema ortogonal completo y el de sistema ortogonal cerrado en cualquier espacio prehilbertiano.

58.5. EXISTENCIA DE LA BASE EN LOS ESPACIOS SEPARABLES DE HILBERT. ISOMORFISMO DE LOS ESPACIOS SEPARABLES DE HILBERT

Teorema 9. *En todo espacio lineal separable X provisto de un producto escalar existe una base ortonormalizada* e_n, $n = 1, 2, \ldots$.

DEMOSTRACIÓN. Cuando el espacio X es n-dimensional, el teorema es evidente (véase el p. 18.4 y p. 57.2), razón por la cual se considerará sólo el caso en que X es de dimensión infinita.

Por cuanto X es un espacio separable, existen en él las sucesiones de elementos

$$\varphi_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

que forman un sistema completo. Desechando sucesivamente aquellos de los elementos que son combinaciones lineales de los restantes, obtendremos una sucesión de elementos

$$\psi_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

los cuales tienen la misma cápsula lineal que el sistema de partida $\{\varphi_n\}$ y que son, además, linealmente independientes (¿por qué?). Al aplicar al sistema obtenido el proceso de ortogonalización (véase el p. 58.2) y el de normalización (véase el p. 58.1), obtendremos un sistema ortonormalizado

$$e_k, \quad \|e_k\| = 1, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

con la misma cápsula lineal que tiene el sistema $\{\psi_n\}$, y, por consiguiente, también la del sistema $\{\varphi_n\}$. Por cuanto, en virtud de la completitud del sistema $\{\varphi_n\}$, esta cápsula lineal es densa en X, el sistema $\{e_n\}$ es completo. Entre tanto, en el punto antecedente (véase la observación que sigue el teorema 7) se ha probado que todo sistema ortonormalizado completo de elementos de un espacio prohilbertiano constituye la base de dicho espacio. □

Teorema 10. *Todos los espacios separables de Hilbert de dimensión infinita son isomorfos entre sí**).

Demostremos previamente dos lemas. El primero de ellos generaliza la igualdad de Parseval (58.36).

Lema 4. *Supongamos que X es un espacio prehilbertiano y* $e_n (e_n \neq 0)$, $n = 1, 2, \ldots$, *un sistema ortogonal completo en X,* $x \in X$, $y \in X$, *y sea*

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \quad y \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n;$$

entonces

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \|e_n\|^2, \tag{58.43}$$

en particular, si se supone adicionalmente que $\|e_n\| = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, *se tiene*

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

La fórmula (58.43) generaliza, obviamente, la fórmula para el producto escalar en un espacio de dimensión finita (véase el p. 18.4).

DEMOSTRACIÓN. Segun la definición de los coeficientes de Fourier

$$a_k = \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2}, \quad b_k = \frac{(y, e_k)}{\|e_k\|^2};$$

por lo que tenemos

$$\left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, y - \sum_{k=1}^{n} b_k e_k\right) = (x, y) - \sum_{k=1}^{n} b_k (x, e_k) -$$
$$- \sum_{k=1}^{n} a_k (y, e_k) + \sum_{k=1}^{b} a_k b_k (e_k, e_k) = (x, y) - \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \|e_k\|^2. \tag{58.44}$$

*) Véase en el p. 57.2 la definición de espacios de dimensión infinita y en el p. 57.9 (definición 36), la de isomorfismo de los espacios.

Por ser completo el sistema e_n, $n = 1, 2, \ldots$, tenemos

$$\lim_{n \to \infty} \left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right) = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \left(y - \sum_{k=1}^{n} b_k e_k\right) = 0,$$

por lo cual, debido a la continuidad del producto escalar para $n \to \infty$, el primer miembro de la igualdad (58.44) tiende a cero, por consiguiente, lo mismo subsiste también para el segundo, es decir,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \|e_k\|^2 = (x, y).$$

Esto es equivalente a la igualdad (58.43). □

Lema 5. *Supongamos que X es un espacio de Hilbert y e_k, $k = 1, 2, \ldots$, una base ortonormalizada en X; a_k, $k = 1, 2, \ldots$ una sucesión de los números tales que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ converge. En este caso la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ converge en el espacio X, y si $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$, entonces a_k, $k = 1, 2, \ldots$ son los coeficientes de Fourier del elemento x.*

DEMOSTRACIÓN. Si $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$, se tiene

$$\|s_{p+p} - s_n\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k, \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k\right) = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad p = 1, 2, \ldots,$$

y, como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ es convergente, ella satisface el criterio de Cauchy para las series convergentes. De aquí proviene que la sucesión $\{s_n\}$ es fundamental en el espacio X y, por lo tanto, converge.

Sea

$$x = \lim_{n \to \infty} s_n, \quad \text{es decir} \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n;$$

entonces, en virtud de que el desarrollo del elemento de un espacio según la base (véase la observación del teorema 7) es único,

$$(x, e_n) = a_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

es decir, a_n son los coeficientes de Fourier del elemento x. □

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 10. Sean X e Y dos espacios separables de Hilbert de dimensión infinita. De acuerdo con el teorema 9, existen en ellos las bases ortonormalizadas e_n, $n = 1, 2, \ldots$, y f_n, $n = 1, 2, \ldots$, respectivamente.

Sea $x \in X$ y $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, entonces a_n son los coeficientes de Fourier del elemento x, y, por consiguiente, según la desigualdad de Parseval, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge. Pongamos $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$. Teniendo presente el lema 5, esto tiene sentido.

La aplicación del espacio X en el espacio Y, la cual a todo elemento $x \in X$ le pone en correspondencia el elemento citado $y \in Y$, es precisamente una aplicación que realiza el isomorfismo de dichos espacios. Efectivamente, en las condiciones de esta correspondencia, a los distintos elementos del espacio X les corresponden diferentes elementos del espacio Y, puesto que el desarrollo de los elementos según la base es único. Luego, todo elemento del espacio Y está puesto en correspondencia a cierto elemento del espacio X (es decir, la citada aplicación es una aplicación sobre el espacio Y); en efecto, si $y \in Y$, entonces, al desarrollarlo en Y según la base, obtendremos

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n.$$

Sea $x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n$ (tal elemento existe, véase el lema 5). Es evidente que precisamente al elemento x corresponde, en la correspondencia establecida, el elemento y. Mostremos por fin que en dicha correspondencia se conserva el producto escalar. Esto proviene inmediatamente del lema 4. Efectivamente, si

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \quad x' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n, \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n, \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n,$$

entonces, en virtud del lema mencionado,

$$(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = (y, y'). \ \square$$

En calidad de modelo de un espacio separable de Hilbert de dimensión infinita puede intervenir un espacio, cuyos elementos constituyen las sucesiones de números reales

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),$$

para las cuales la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ converge, es decir, el espacio l_2 (véase el ejemplo 5 en el p. 57.4). El producto escalar en este espacio se introduce según la siguiente regla:

si $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ *e* $y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$,

entonces $(x, y) = \sum_{k+1}^{\infty} x_k y_k$.

Esta definición tiene sentido, pues de la convergencia de las series $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ y $\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2$ se desprende que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ es también convergente. Esto se deduce, por ejemplo, de la desigualdad de Hölder para las series cuando $p = 2$ (en este caso dicha desigualdad lleva, a menudo, el nombre de Cauchy-Schwarz), pero puede obtenerse también de la desigualdad elemental

$$x_k y_k \leqslant \frac{x_k^2 + y_k^2}{2}.$$

La norma en el espacio l_2 se determina de confirmidad con la regla general mediante la fórmula

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}.$$

Teorema 11. *El espacio l_2 es un espacio separable de Hilbert.*

DEMOSTRACIÓN. El espacio l_2 es separable, pues las sucesiones e_k, $k = 1, 2, \ldots$, en las que todos los lugares están ocupados por ceros, a excepción del k-ésimo, donde figura la unidad, forman una base ortonormalizada y, por consiguiente, sus combinaciones lineales finitas con los coeficientes racionales forman un conjunto numerable denso en el espacio l_2 (¿por que?).

La completitud del espacio l_2 se demuestra de una manera un tanto más compleja. Sea

$$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, \ldots), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{58.45}$$

una sucesión fundamental del espacio l_2. Entonces, de la desigualdad

$$\|x^{(k+p)} - x^{(k)}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^{(k+p)} - x_n^{(k)})^2} \geqslant$$

$$\geqslant |x_n^{(k+p)} - x_n^{(k)}|, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

y de la sucesión fundamental (58.45) se deduce que para cualquier n fijo la sucesión numérica $x_n^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, satisface el criterio de Cauchy (véase el p. 4.7) y, por consiguiente, converge. Sea $\lim_{k \to \infty} x_n^{(k)} = x_n$. Por ser la sucesión (58.45) fundamental, para todo $\varepsilon > 0$ existe tal número k_ε que se verifica la desigualdad

$$\|x^{(k+p)} - x^{(k)}\| < \varepsilon,$$

cualesquiera que sean el número $k \geqslant k_\varepsilon$ y p natural, es decir,

$$\sqrt{\sum_{n+1}^{\infty} (x_n^{(k+p)} - x_n^{(k)})^2} < \varepsilon.$$

De aquí para todo número natural fijo m tenemos con mayor razón

$$\sum_{n=1}^{m} (x_n^{(k+p)} - x_n^{(k)})^2 < \varepsilon^2.$$

Pasando aquí al límite para $p \to \infty$, obtendremos

$$\sum_{n=1}^{m} (x_n - x_n^{(k)})^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

y, como esto es cierto para cualquier $m = 1, 2, \ldots$, se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_n^{(k)})^2 \leqslant \varepsilon^2, \quad k \geqslant k_\varepsilon. \tag{58.46}$$

De este modo, el punto $y^{(k)} = (x_1 - x_1^{(k)}, \ldots, x_n - x_n^{(k)}, \ldots)$, $k \geqslant k_\varepsilon$, pertenece al espacio l_2, mas, en este caso, también le pertenece a l_2 el punto $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) = x^{(k)} + y^{(k)}$, mientras que la condición (58.46) significa que

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x.$$

Hemos demostrado pues que la sucesión (58.46) converge. Por consiguiente, l_2 es un espacio completo. □

En virtud del teorema 10, el espacio l_2 es isomorfo a todo espacio separable de Hilbert.

En el p. 58.3 se ha mostrado que el espacio $L_2[a, b]$ es separable (véase allí el teorema 2) para cualquier segmento $[a, b]$, por consiguiente, es también isomorfo al espacio l_2. Se puede probar que el espacio $L_2(G)$, donde G es un conjunto medible de medida positiva del espacio n-dimensional, también es separable y, por ende, isomorfo a l_2. De este modo, todos los espacios de Hilbert de funciones integrables en cuadrado son isomorfos entre sí, independientemente del número de variable de las cuales dependen las funciones citadas.

58.6. DESARROLLO DE LAS FUNCIONES DE CUADRADO INTEGRABLE EN SERIE DE FOURIER

En el § 55 se estudiaban las series clásicas de Fourier, es decir, las series de Fourier según el sistema trigonométrico de funciones, para las funciones absolutamente integrables. En el presente punto se obtendrá toda una serie de corolarios, provenientes de la teoría general de las series de Fourier en los espacios de Hilbert y de la propiedad de completitud de un sistema de funciones trigonométricas en el espacio $L_2[-\pi, \pi]$, para las series trigonométricos de Fourier de una clase más reducida de funciones, en comparación con las funciones absolutamente integrables, a saber, para las funciones de cuadrado integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$, es decir, para las funciones del espacio $RL_2[-\pi, \pi]$ (véase el ejemplo 3 en el p. 57.8).

Observemos, ante todo, que si en el espacio de Hilbert $L_2[-\pi, \pi]$ se toma, a título de sistema ortogonal, el sistema trigonométrico

$$1, \cos x, \operatorname{sen} x, \ldots, \cos nx, \operatorname{sen} nx, \ldots, \tag{58.2}$$

los coeficientes de Fourier del elemento $f \in L_2[-\pi, \pi]$ según este sistema se determinarán, de acuerdo con (58.23), según las fórmulas

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}(f, 1), \quad a_n = \frac{1}{\pi}(f, \cos nx), \quad b_n = \frac{1}{\pi}(f, \operatorname{sen} nx), \tag{58.47}$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

pues $\|1\|_{L_2} = \sqrt{2\pi}$, $\|\cos nx\|_{L_2} = \|\operatorname{sen} nx\|_{L_2} = \sqrt{\pi}$ (véase el p.58.1).

Si f es una función continua en el segmento $[-\pi, \pi]$, entonces $f \in CL_2[-\pi, \pi] \subset L_2[-\pi, \pi]$. Comparando las fórmulas (58.47) para los coeficientes de Fourier de la función f con las (55.6) (el producto escalar se define, como siempre, mediante las fórmulas (57.30)), vemos que todas ellas coinciden, salvo la fórmula para el coeficiente a_0, la cual en (58.47) difiere de la en (55.6) en el factor 1/2. Pagando el tributo a la tradición, nos atendremos, en lo que sigue, a la fórmula (55.6) para a_0, es decir, se considerará que

$$a_0 = \frac{1}{\pi}(f, 1) \qquad (58.48)$$

y la serie trigonométrica de Fourier se escribirá en la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx.$$

Aplicando el teorema 6 al sistema trigonométrico (58.2) y teniendo presente que dicho sistema es completo en el espacio $L_2[-\pi, \pi]$ (véase el ejemplo 3 en el p. 58.3), obtendremos el siguiente teorema.

Teorema 12. *Cualquier elemento $f \in L_2[-\pi, \pi]$ se desarrolla en este espacio en una serie de Fourier según el sistema trigonométrico*

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx, \qquad (58.49)$$

siendo en este caso válida la igualdad de Parseval

$$\frac{1}{\pi}\|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

Corolario 1. *Toda función $f(x)$ de cuadrado integrable en el sengmento $[-\pi, \pi]$*

1) *es el límite, en el sentido de la media cuadrática (véase el p. 57.5), de sus sumas parciales de Fourier $S_n(x)$ según el sistema trigonométrico de funciones para $n \to \infty$, es decir,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = 0; \qquad (58.50)$$

2) *y para ella es lícita la igualdad de Parseval*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2. \qquad (58.51)$$

Corolario 2. *Si la función f de cuadrado integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$ y todos sus coeficientes de Fourier según el sistema trigonométrico* (58.2) *son iguales a cero, la función es equivalente a cero.*

Aquí los coeficientes de Fourier para $n = 1, 2, \ldots$ se determinan siempre a partir de las fórmulas (58.47), y el coeficiente a_0, según la fórmula (58.48).

Por cuanto el propio teorema 12 se infiere del teorema 6, la demostración se necesita sólo para los corolarios.

Así pues, sea $f(x)$ una función de cuadrado integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$, es decir, $f(x) \in RL_2[-\pi, \pi]$ (véase el ejemplo 8 en el p. 57.4 y el ejemplo 3 en el p. 57.8). Hemos de notar, ante todo, que cualquier función $g(x)$, equivalente a $f(x)$ (véase la definición 38 en el p. 57.10), tiene los mismos coeficientes de Fourier y, por consiguiente, la misma serie de Fourier. Esto proviene de que el producto semiescalar en el espacio $RL_2[-\pi, \pi]$ no varía, si sus factores se sustituyen por los equivalentes (véase la fórmula (57.41)), y por esta razón, si $f \sim g$, se tiene

$$a_0 = \frac{1}{\pi}(f, 1)_{RL_2} = \frac{1}{\pi}(g, 1)_{RL_2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}(f, \cos nx)_{RL_2} = \frac{1}{\pi}(g, \cos nx)_{RL_2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}(f, \operatorname{sen} nx)_{RL_2} = \frac{1}{\pi}(g, \operatorname{sen} nx)_{RL_2},$$

$$n = 1, 2, \ldots^{*)}$$

Por consiguiente, si designamos con F la clase de funciones equivalentes en la que está contenida la función f, entonces, debido a la definición (57.41) de producto escalar de las clases de funciones equivalentes, es decir, de producto escalar en el espacio $\widetilde{RL}_2[-\pi, \pi]$ (véase el p. 57.10), tendremos

$$a_0 = \frac{1}{\pi}(F, 1)_{\widetilde{RL}_2}, \quad a_n = \frac{1}{\pi}(F, \cos nx)_{\widetilde{RL}_2}, \quad b_n = \frac{1}{\pi}(F, \operatorname{sen} nx)_{\widetilde{RL}_2}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

es decir, la serie de Fourier del elemento $F \in \widetilde{RL}_2[-\pi, \pi] \subset L_2[-\pi, \pi]$ coincide con la serie de Fourier de toda función $f \in F$. De acuerdo con el teorema 12, en el espacio $L_2[-\pi, \pi]$ tiene lugar el desarrollo

$$F = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx, \qquad (58.52)$$

y se verifica la igualdad de Parseval

$$\frac{1}{\pi}\|F\|_{L_2}^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2. \qquad (58.53)$$

Si $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx$ es una suma parcial de la serie de Fourier (58.52), entonces la convergencia de esta serie en el espacio $L_2[-\pi, \pi]$ hacia

*) El índice en los productos escalares y semiescalares indica en qué espacios se toman los productos en consideración.

el elemento F significa que

$$\lim_{n\to\infty} \|F - S_n(x)\|_{L_2} = 0. \tag{58.54}$$

Si ahora, $f \in F$, se tiene (véase (57.42))

$$\|F - S_n(x)\|_{L_2} = \|f(x) - S_n(x)\|_{RL_2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx}, \tag{58.55}$$

donde $\|f(x) - S_n(x)\|_{RL_2}$ es la seminorma de la función $f(x) - S_n(x)$ en el espacio $RL_2[-\pi, \pi]$, lo que tiene sentido, pues $f(x) - S_n(x) \in F - S_n(x)$. De (58.54) y (58.55) se desprende que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \lim_{n\to\infty} \|f(x) - S_n(x)\|_{RL_2} = 0,$$

es decir, la igualdad (58.50) queda demostrada.

Luego, como, en virtud de la misma fórmula (57.42), tienen lugar las igualdades

$$\|F\|_{L_2} = \|f\|_{RL_2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx}$$

y los coeficientes de Fourier de F y f son iguales, entonces (58.51) se desprende inmediatamente de (58.53).

Para demostrar el corolario 2, observemos que si todos los coeficientes de Fourier de la función $f \in RL_2[-\pi, \pi]$ según el sistema trigonométrico son nulos, entonces de la igualdad de Parseval (58.51) proviene que

$$\|f\|^2_{RL_2} = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = 0,$$

y esto significa, de acuerdo con la definición 38 del p. 57.10 referente a las funciones equivalentes, que

$$f \sim 0.$$

Así, fijemos nuestra atención en que si los coeficientes de Fourier de una función de cuadrado integrable son todos iguales a cero, dicha función no es necesariamente cero idéntico, sino que es equivalente a él.

Ambos corolarios están demostrados.

De la igualdad de Parseval (58.51) se infiere una vez más (independientemente del teorema 2 en el p. 55.2) que los coeficientes de Fourier de la función $f(x)$ tienden a cero (pues el término general de la serie convergente (58.51) siempre tiende a cero) con la peculiaridad de que esto tiene lugar sólo para las funciones de cuadrado integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$. Por cuanto toda función, continua en el segmento $[-\pi, \pi]$, es a la vez una función de cuadrado integrable, para ella es también válida la afirmación del primer corolario del teorema 12; esta función se desarrolla en serie de Fourier que converge a ella en el sentido de la media cuadrática y para ella es lícita la igualdad de Parseval (58.51).

Mientras tanto el segundo corolario para las funciones continuas puede ser considerablemente reforzado. Enunciémoslo en forma de un teorema.

Teorema 13. *Si todos los coeficientes de Fourier de una función continua en el segmento $[-\pi, \pi]$ son iguales a cero, la misma función es idénticamente igual a cero.*

Corolario (teorema sobre la unicidad del desarrollo de una función continua en la serie de Fourier). *Si dos funciones continuas tienen iguales coeficientes de Fourier, son idénticamente iguales.*

DEMOSTRACIÓN. Si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[-\pi, \pi]$ y todos los coeficientes de Fourier de la misma son nulos, de la igualdad de Parseval (58.51) tenemos $\|f\|_{RL_2} = 0$. Pero la seminorma del espacio $RL_2[-\pi, \pi]$ en el conjunto de funciones continuas interviene como una norma (véase el ejemplo 9 en el p. 57.4), por lo cual $f(x) = 0$ para cualquier $x \in [-\pi, \pi]$.

El corolario se desprende de lo que la diferencia de dos funciones, cuyos coeficientes de Fourier son iguales, tiene coeficientes de Fourier nulos y, por ende, es cero idéntico. □

OBSERVACIÓN 1. Los teoremas 12 y 13 se han formulado con referencia al sistema trigonométrico de funciones. Las afirmaciones similares son válidas, por supuesto, para cualquier sistema ortogonal completo de funciones, es decir, para un sistema que forma una base ortogonal en el espacio $L_2[a, b]$. En particular, las afirmaciones análogas subsisten para los desarrollos de las funciones según polinomios de Legendre (véase el ejemplo 2 en el p. 58.3) en el espacio $L_2[-1, 1]$. Por ejemplo, si todos los coeficientes de Fourier de una función continua en el segmento $[-1, 1]$ según el sistema de polinomios de Legendre son nulos, dicha función será igual a cero en todo punto del segmento $[-1, 1]$. Las demostraciones de las afirmaciones semejantes pueden efectuarse siguiendo el mismo esquema que se ha usado anteriormente.

OBSERVACIÓN 2. El hecho esencial y fundamental que ha permitido demostrar el teorema 12 consiste en la completitud del sistema trigonométrico en el espacio $L_2[-\pi, \pi]$, la cual, a su vez, se basa sobre la posibilidad de aproximar en el segmento $[-\pi, \pi]$, con cualquier grado de precisión en el sentido de la media cuadrática, toda función de cuadrado integrable en dicho segmento por una función continua de período 2π (véase el lema 16 del p. 57.10). Entre tanto, el empleo de la teoría general sobre el desarrollo según sistemas ortogonales en el espacio de Hilbert tenía, de hecho, sólo carácter terminológico y permitía realizar y anotar los razonamientos en una forma más breve e ilustrativa. A título de ejemplo de un concepto que es muy cómodo, al considerar los problemas estudiados, indiquemos, ante todo, el de espacio lineal normalizado (en particular, del espacio prehilbertiano) y, por consiguiente, el concepto de norma. La introducción de estos conceptos permitió exponer la teoría de desarrollos según los sistemas ortonormalizados independientemente de su forma concreta. Estos conceptos tienen también las más diversas aplicaciones en diferentes apartados de las matemáticas.

En conclusión, haciendo uso de los resultados obtenidos, demostremos un teorema más.

Teorema 14. *Supongamos que la función f es continua en el segmento $[-\pi, \pi]$. Si su serie de Fourier converge uniformemente en el segmento $[-\pi, \pi]$, la suma de dicha serie será igual a la función f.*

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

y

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

la suma de la serie de Fourier de la función f.

Ante todo, la función $S(x)$, como una suma de la serie convergente de las funciones continuas, es también continua. Luego, en virtud del teorema 1 del p. 55.1, los números $a_0, a_n, b_n, n = 1, 2, \ldots$, constituyen los coeficientes de Fourier de la función $S(x)$.

De este modo, dos funciones f y S, continuas en el segmento $[-\pi, \pi]$ tienen coeficientes de Fourier iguales y por esta razón, en virtud de lo dicho anteriormente, coinciden en todos los puntos del segmento $[-\pi, \pi]$: $f(x) = S(x)$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. □

58.7*. TRANSFORMACIÓN DE FOURIER DE LAS FUNCIONES INTEGRABLES EN CUADRADO. TEOREMA DE PLANCHEREL

Si el cuadrado de la función f es integrable en todo el eje real, la propia función, en el caso general, no es absolutamente integrable en todo el eje, lo que muestra el ejemplo de la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Por eso, en virtud de la teoría de transformación de Fourier expuesta en el § 56, no puede afirmarse la existencia de la transformación de Fourier para las funciones del espacio $L_2(-\infty, \infty)$. Mostremos que en este caso se puede definir la transformación de Fourier en cierto sentido generalizado. Previamente nos detendremos en la definición del espacio $L_2(-\infty, \infty)$ para las funciones de valores complejos.

Sean f y g dos funciones continuas de cuadrado integrable del módulo en todo el eje que toman, por regla general, los valores complejos. Su producto escalar se determina en este caso según la fórmula

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Se comprueba con facilidad que todas las propiedades, de las cuales debe disponer un producto escalar en un espacio lineal complejo (véase el p. 57.7), en el caso dado se cumplen.

El espacio $L_2(-\infty, \infty)$, que se considera en este punto, se definirá como complemento de un espacio prehilbertiano de funciones continuas de valores

complejos con cuadrado del módulo integrable en todo el eje y producto escalar indicado (compárese con el teorema 6, p. 57.10). Con $\|f\|$ se designa en este párrafo la norma del elemento $f \in L_2(-\infty, +\infty)$, es decir,

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)},$$

y asimismo la seminorma

$$\|f\| = \sqrt{\int_{+\infty}^{+\infty} f(x)\overline{f(x)}dx}$$

para las funciones f de cuadrado del módulo integrable en todo el eje. Anteriormente se ha asumido sin demostración, para el caso de las funciones reales (véase el p. 57.10), que todo elemento del espacio L_2 puede considerarse como una clase de funciones. La afirmación análoga es válida también para el espacio L_2 de funciones de valores complejos, con la particularidad de que la seminorma $\|f\|$ de las funciones f coincide con la norma del elemento del espacio L_2, al cual pertenece (en el sentido análogo al indicado en el p. 57.10) la función f. No nos detendremos en la demostración de estos hechos y no los utilizaremos en adelante.

Una función de valores complejos $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$, donde $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son funciones reales, $-\infty < x < +\infty$, se llamará función escalonada finita, si lo son las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ (véase la definición 7 en el p. 55.2). En lo que sigue las funciones escalonadas finitas se llamarán, para abreviar, simplemente escalonadas.

Cualesquiera dos funciones escalonadas $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ pueden ser representadas en forma de una combinación lineal finita de las mismas funciones de un escalón (véase el p. 55.2) que toman los valores 1 y 0. Para ello basta tomar toda clase de intersecciones no vacías de los semiintervalos, donde las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ quedan constantes. Dichas intersecciones son también semiintervalos $[x_{k-1}, x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, donde quedan constantes simultáneamente las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$. Por eso, si

$$\omega_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_{k-1} \leqslant x < x_k, \\ 0, & \text{si } x < x_{k-1} \text{ ó } x \geqslant x_k, \end{cases}$$
$$k = 1, 2, \ldots, n,$$

son las correspondientes funciones de un escalón, existen tales números reales λ_k, $\mu_k = 1, 2, \ldots, n$, que

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \omega_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \omega_k(x).$$

De aquí se deduce que toda función de un escalón de valores complejos $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ es representable en forma de

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \omega_k(x), \tag{58.56}$$

donde $\zeta_k = \lambda_k + i\mu_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, son números complejos.

Lema 6. *Sea f una función escalonada de valores complejos y sea $F[f]$ su transformación de Fourier, entonces*

$$\|F[f]\| = \|f\|.$$

DEMOSTRACIÓN. Si la función f viene dada por la fórmula (58.56), se tiene

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{f(x)}dx =$$

$$= \sum_{j,\,k=1}^{n} \zeta_j\bar{\zeta}_k \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_j(x)\overline{\omega_k(x)}dx = \sum_{k=1}^{n} |\zeta_k|^2(x_k - x_{k-1}). \qquad (58.57)$$

Sea ahora $0 < \eta < +\infty$; entonces

$$\int_{-\eta}^{\eta} F[f]\overline{F[f]}dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(\xi)}e^{i\xi y}d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{f(\xi)}dx\,d\xi \int_{-\eta}^{\eta} e^{iy(\xi - x)}dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{f(\xi)}\,\frac{\operatorname{sen}\eta(\xi - x)}{\xi - x}\,dx\,d\xi. \qquad (58.58)$$

Todas las transformaciones son verídicas aquí, puesto que todas las integrales se calculan, de hecho, dentro de los límites finitos.

Por cuanto las partes real e imaginaria de la función $f(x)$ satisfacen las condiciones del teorema sobre la representación de funciones mediante la integral de Fourier (véase el teorema 1 en el p. 56.1), resulta, pues, que para todo x, a excepción de $x = x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, se tiene (véase la demostración del teorema citado)

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(\xi)}\,\frac{\operatorname{sen}\eta(\xi - x)}{\xi - x}\,d\xi = \overline{f(x)}.$$

Se pone de manifiesto que en virtud de lo observado y teniendo presentes nuestras suposiciones acerca de la última integral (58.58), podemos pasar al límite bajo el signo de la integral exterior para $\eta \to +\infty$. No obstante, el teorema correspondiente no fue demostrado en el presente curso, a consecuencia de lo cual nos vemos obligados a realizar ciertos cálculos complementarios. Sustituyendo (58.56) en (58.58), obtenemos

$$\int_{-\eta}^{\eta} F[f]\overline{F[f]}dy = \frac{1}{\pi}\sum_{i,\,k=1}^{n}\zeta_j\bar{\zeta}_k\int_{x_{j-1}}^{x_j}dx\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{\operatorname{sen}\eta(\xi - x)}{\xi - x}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{i,\,k=1}^{n}\zeta_j\bar{\zeta}_k\int_{x_{j-1}}^{x_j}dx\int_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k - x)}\frac{\operatorname{sen}t}{t}\,dt. \qquad (58.59)$$

Analicemos el comportamiento de cada sumando de la suma obtenida cuando $\eta \to +\infty$. Si $j = k$, entonces, cambiando el orden de integración (fig. 242) y efec-

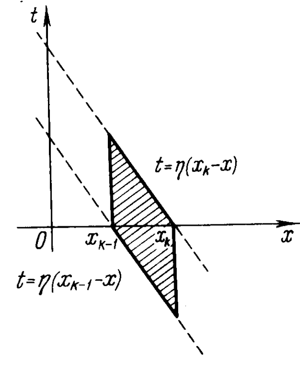


Fig. 242

tuando la integración respecto de la variable x, obtendremos:

$$\frac{1}{\pi}\int_{x_{k-1}}^{x_k}dx\int_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k - x)}\frac{\operatorname{sen}t}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\eta(x_k - x_{k-1})}\left(x_k - x_{k-1} - \frac{t}{\eta}\right)\frac{\operatorname{sen}t}{t}\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_{-\eta(x_k - x_{k-1})}^{0}\left(x_k - x_{k-1} + \frac{t}{\eta}\right)\frac{\operatorname{sen}t}{t}\,dt\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}(x_k - x_{k-1})\int_0^{\eta(x_k - x_{k-1})}\frac{\operatorname{sen}t}{t}\,dt + \frac{2}{\pi\eta}[1 - \cos\eta(x_k - x_{k-1})].$$

Como

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

(véase el p. 54.4), se tiene

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{2}{\pi}(x_k - x_{k-1})\int_0^{\eta(x_k - x_{k-1})}\frac{\operatorname{sen}t}{t}\,dt = x_k - x_{k-1}.$$

Luego, evidentemente,

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{2}{\pi\eta}[1 - \cos\eta(x_k - x_{k-1})] = 0,$$

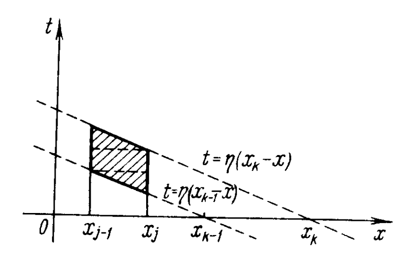


Fig. 243

por lo cual

$$\lim_{\eta \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{x_{k-1}}^{x_k} dx \int_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k - x)} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Mostremos ahora que para $j \neq k$

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int_{x_{j-1}}^{x_j} dx \int_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k - x)} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = 0.$$

Sea, para concretar, $x_{j-1} < x_j \leqslant x_{k-1} < x_k$. Para otras disposiciones de los semiintervalos $[x_{j-1}, x_j)$ y $[x_{k-1}, x_k)$, donde las funciones quedan constantes, la demostración es análoga. Cambiando de nuevo el orden de integración y realizando la integración respecto de x (fig. 243) obtendremos, recurriendo a los razonanientos semejantes:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} dx \int_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k - x)} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = \int_{\eta(x_k - x_j)}^{\eta(x_k - x_{j-1})} \left(x_k - x_{j-1} - \frac{t}{\eta}\right) \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt +$$

$$+ \int_{\eta(x_{k-1} - x_{j-1})}^{\eta(x_k - x_j)} (x_j - x_{j-1}) \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt +$$

$$+ \int_{\eta(x_{k-1} - x_j)}^{\eta(x_{k-1} - x_{j-1})} \left(x_j - x_{k-1} + \frac{t}{\eta}\right) \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt \to 0 \quad \text{para} \quad \eta \to \infty.$$

Ahora, de (58.59) tenemos

$$\|F[f]\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} F[f]\overline{F[\bar f]}\, dx = \lim_{\eta \to +\infty} \int_{-\eta}^{\eta} F[f]F[\bar f]\, dy =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |\zeta_k|^2 (x_k - x_{k-1}) = \|f\|^2. \ \square$$

Lema 7. *Sea f una función de valores complejos, continua en el segmento $[a, b]$ e igual a cero fuera de dicho segmento; existe una sucesión de tales funciones escalonadas φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, que*

$$\lim_{n \to \infty} \|\varphi - \varphi_n\| = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Para las funciones reales dicha afirmación se desprende del lema 14, p. 57.10. Supongamos ahora que $\varphi = u + iv$ es una función de valores complejos continua en el segmento $[a, b]$; en este caso las funciones reales u y v son también continuas en el segmento $[a, b]$. Por eso, existen tales sucesiones de funciones escalonadas $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ que $\|u - u_n\| \to 0$ y $\|v - v_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Si es que $\varphi_n = u_n + iv_n$, entonces $\|\varphi - \varphi_n\| \leqslant \|u - u_n\| + \|v - v_n\|$, de donde $\|\varphi - \varphi_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. $\square$

Lema 8. *Supongamos que una función de valores complejos φ es continua en el segmento $[a, b]$ y es igual a cero fuera de él, en este caso*

$$\|F[\varphi]\| = \|\varphi\|.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea φ_n una sucesión de funciones escalonadas de tal género que

$$\lim_{n \to \infty} \|\varphi - \varphi_n\| = 0$$

(véase el lema 7), entonces, en virtud de la continuidad de la norma,

$$\lim_{n \to \infty} \|\varphi_n\| = \|\varphi\|. \tag{58.60}$$

Entre tanto, de la desigualdad de Cauchy — Buniakovski obtenemos

$$\int_a^b |\varphi_n(x) - \varphi(x)|\, dx \leqslant \left(\int_a^b dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^2 dx\right)^{1/2} =$$

$$= (b - a)^{1/2} \left(\int_a^b |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |\varphi_n(x) - \varphi(x)|\, dx = 0,$$

es decir, la sucesión $\{\varphi_n\}$ converge en media hacia la función φ y converge en el sentido de L_1. Por esta razón, si

$$\psi = F[\varphi], \quad \psi_n = F[\varphi_n], \quad n = 1, 2, \ldots,$$

entonces la sucesión de las funciones continuas $\{\psi_n\}$ (véase el corolario del lema 4 en el p. 56.7) converge uniformemente hacia la función ψ, la cual es, debido a esto, continua en todo el eje numérico. Además, en virtud del lema 6,

$$\|\psi_n\| = \|\varphi_n\|. \tag{58.61}$$

De aquí proviene, en particular, que las funciones continuas ψ_n son funciones de cuadrado integrable del módulo, es decir, pertenecen al espacio $L_2(-\infty, +\infty)$. Ahora, las funciones ψ_n, $n = 1, 2, \ldots$, forman una sucesión fundamental en el espacio $L_2(-\infty, +\infty)$. Esto se deduce de lo que la sucesión $\{\varphi_n\}$ converge en media

en el sentido de L_2 y también de la igualdad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(y) - \psi_m(y)|^2 dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(y) - \varphi_m(y)|^2 dy,$$

la cual también proviene del lema 6, pues la diferencia entre las funciones escalonadas es asimismo una función escalonada.

Mostremos que la sucesión $\{\psi_n\}$ converge hacia la función ψ también en el espacio L_2. En efecto, siendo $\varepsilon > 0$ fijo, existe, por ser la sucesión $\{\psi_n\}$ fundamental, tal número n_ε que para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y $m \geqslant n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad

$$\|\psi_n - \psi_m\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(y) - \psi_m(y)|^2 dy < \varepsilon.$$

Con mayor razón, para cualquier número $c > 0$ tendremos

$$\int_{-c}^{c} |\psi_n(y) - \psi_m(y)|^2 dy < \varepsilon. \tag{58.62}$$

Cuando n y c son fijos y $m \to \infty$, la expresión subintegral en (58.62) converge uniformemente hacia la función $|\psi_n(y) - \psi(y)|^2$. Por ello, en la desigualdad (58.62) podemos pasar al límite bajo el signo de la integral para $m \to \infty$. De resultas tendremos

$$\int_{-c}^{c} |\psi_n(y) - \psi(y)|^2 dy \leqslant \varepsilon.$$

Ahora, haciendo tender c hacia $+\infty$, obtendremos que para $n \geqslant n_\varepsilon$ se verifica la desigualdad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(y) - \psi(y)|^2 dy \leqslant \varepsilon, \tag{58.63}$$

lo que precisamente significa la convergencia en media, en el sentido de L_2, de la sucesión $\{\psi_n\}$ hacia la función ψ.

De lo demostrado se deduce también que $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$. Efectivamente, en virtud de (58.61) y (58.63),

$$\|\psi\| \leqslant \|\psi - \psi_n\| + \|\psi_n\| < +\infty.$$

Por fin, de la desigualdad (57.18) obtenemos, teniendo presente que $\lim\limits_{n\to\infty} \|\psi_n - \psi\| = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n\| = \|\psi\|. \tag{58.64}$$

De (58.60), (58.61) y (58.64) se infiere que

$$\|\psi\| = \|\varphi\|. \ \square$$

Teorema 15 (de Plancherel*)). *Supongamos que φ es una función continua de cuadrado integrable del módulo en todo el eje numérico y sea*

*) M. Plancherel (1885 — 1967), matemático suizo.

$$\psi_M(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M}^{M} \varphi(x) e^{-ixy} dx, \quad M > 0.$$

Entonces:

1) *la función $\psi_M(y)$ es también continua y de cuadrado integrable en todo el eje numérico;*

2) *cuando $M \to +\infty$, las funciones ψ_M convergen en el espacio $L_2(-\infty, +\infty)$ hacia cierto elemento $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$ y*

3) $\|\varphi\| = \|\psi\|$.

DEMOSTRACIÓN. Si

$$\varphi_M(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{si } x \in [-M, M], \\ 0, & \text{si } x \notin [-M, M], \end{cases}$$

será obvio que

$$\psi_M = F[\varphi_M],$$

$$\lim_{M\to+\infty} \varphi_M = \varphi \text{ en } L_2(-\infty, +\infty), \tag{58.65}$$

$$\lim_{M\to+\infty} \|\varphi_M\| = \|\varphi\|. \tag{58.66}$$

De conformidad con el lema 8,

$$\|\psi_M\| = \|\varphi_M\|, \quad M > 0, \tag{58.67}$$

$$\|\psi_{M_1} - \psi_{M_2}\| = \|\varphi_{M_1} - \varphi_{M_2}\|, \quad M_1 > 0, \quad M_2 > 0. \tag{58.68}$$

De (58.65) y (58.68) proviene, en virtud de que el espacio $L_2(-\infty, +\infty)$ es completo, que existe un límite (¿por que?)

$$\lim_{M\to+\infty} \psi_M = \psi \text{ en } L_2(-\infty, +\infty).$$

Por ser continua la norma,

$$\lim_{M\to+\infty} \|\psi_M\| = \|\psi\| \tag{58.69}$$

de (58.66), (58.67) y (58.69) tenemos

$$\|\psi\| = \|\varphi\|. \ \square$$

El elemento $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$, obtenido en el transcurso de la demostración, lo llamaremos también *transformación de Fourier* de la función continua dada $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ y anotaremos

$$\psi = F[\varphi]. \tag{58.70}$$

Esta notación es natural, puesto que si la función φ es, además, absolutamente integrable, entonces $\lim\limits_{M\to+\infty} \psi_M$ coincide con la transformación de Fourier ordinaria. En efecto, en este caso

$$\lim_{M\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_M(x) - \varphi(x)| dx = 0.$$

Por consiguiente, las funciones $\psi_M = F[\varphi_M]$ convergen uniformemente, cuando $M \to \infty$, hacia la transformación de Fourier $F[\varphi]$ de la función φ. Como vimos, ψ_M converge en media en el sentido de L_2 hacia la función ψ; de aquí no es difícil convencerse de que $\psi = F[\varphi]$ (compárese el razonamiento análogo en la demostración del lema 8).

La transformación de Fourier (58.70) está definida por ahora sólo para aquellos elementos $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$, que representan en sí funciones continuas de cuadrado integrable, sin embargo por su continuidad puede ser extendida a todo el espacio $L_2(-\infty, +\infty)$. En efecto, sea φ un elemento arbitrario del espacio $L_2(-\infty, +\infty)$. De acuerdo con la definición del espacio $L_2(-\infty, +\infty)$, el conjunto de funciones continuas es denso en él. Por consiguiente, existe una sucesión de funciones continuas

$$\varphi_n \in L_2(-\infty, +\infty), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

tal que $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n = \varphi$, es decir, $\lim\limits_{n \to \infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0$.

Sea $F[\varphi_n] = \psi_n$, $n = 1, 2, \ldots$. En virtud del teorema Plancherel,

$$\|\psi_n - \psi_m\| = \|\varphi_n - \varphi_m\|, \quad n, m = 1, 2, \ldots,$$

por lo cual la sucesión $\{\psi_n\}$ es fundamental en L_2 y, por ende, es convergente. Sea $\psi = \lim\limits_{n \to \infty} \psi_n$. Por definición suponemos

$$\psi = F[\varphi]. \tag{58.71}$$

Si $\varphi_n^* \in L_2(-\infty, +\infty)$, $n = 1, 2, \ldots$, es alguna otra sucesión de funciones continuas que en $L_2(-\infty, +\infty)$ converge al elemento φ, y si $\psi_n^* = F[\varphi_n^*]$, entonces de la igualdad

$$\|\varphi_n - \varphi_n^*\| = \|\psi_n - \psi_n^*\|$$

tenemos $\lim\limits_{n \to \infty} \psi_n^* = \psi$. De este modo, la definición (58.71) no depende de cómo se elige la sucesión de funciones continuas que converja hacia el elemento φ.

Para cualquier $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ resulta válida la igualdad

$$\|F[\varphi]\| = \|\varphi\|,$$

lo cual proviene inmediatamente de que esta igualdad tiene lugar para las funciones continuas $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ y de la continuidad de la norma.

Luego, es fácil comprobar que la transformación de Fourier F es lineal en $L_2(-\infty, +\infty)$, es decir,

$$F[\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2] = \lambda_1 F[\varphi_1] + \lambda_2 F[\varphi_2]$$

para cualesquiera φ_1 y φ_2 de $L_2(-\infty, +\infty)$ y cualesquiera números λ_1 y λ_2. Esto es cierto para las funciones escalonadas. Ellas forman en $L_2(-\infty, +\infty)$ un conjunto denso. De aqui, la igualdad citada se obtiene pasando al límite para cualesquiera elementos del espacio $L_2(-\infty, +\infty)$.

Por fin, la transformación de Fourier aplica el espacio $L_2(-\infty, +\infty)$ *sobre sí mismo*, es decir, cualquiera que sea el elemento $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$, existe un elemento $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ tal que $F[\varphi] = \psi$. Con el fin de probarlo, se debe definir, empleando el mismo método que se ha utilizado para la transformación de Fourier, en el espacio $L_2(-\infty, +\infty)$ la transformación de Fourier inversa F^{-1} y mostrar que para todo elemento $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$ se verifica la igualdad $\|F^{-1}[\psi]\| = \|\psi\|$. A continuación, se puede mostrar que

$$F[F^{-1}[\psi]] = \psi \quad \text{y} \quad F^{-1}[F[\psi]] = \psi$$

para cualquier $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$, partiendo de que esto es cierto sobre un conjunto de funciones escalonadas que forman en $L_2(-\infty, +\infty)$ un conjunto denso. Si, ahora, tomamos, para el elemento $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$, un elemento $\varphi = F^{-1}[\psi]$, entonces obtendremos $F[\varphi] = \psi$, lo que precisamente significa que la transformación F aplica todo el espacio $L_2(-\infty, +\infty)$ sobre sí mismo.

Al resumir todo lo dicho, llegamos al siguiente teorema.

Teorema 16 (de Plancherel). *La transformación de Fourier F es lineal y aplica biunívocamente el espacio $L_2(-\infty, +\infty)$ sobre sí mismo, con la particularidad de que para cualquier elemento $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ se verifica la igualdad*

$$\|F[\varphi]\| = \|\varphi\|.$$

§ 59. FUNCIONES GENERALIZADAS

59.1. RAZONAMIENTOS GENERALES

Se considerará en este párrafo una generalización del concepto clásico de una función, a saber, el concepto de función generalizada. Ha surgido en el proceso de resolución de ciertos problemas físicos y en los últimos años se ha arraigado en las matemáticas rápida y sólidamente. Con ayuda de este concepto la transformación de Fourier puede extenderse a una clase de funciones más amplia que las funciones absolutamente integrables o de cuadrado integrable. Permite formular en el lenguaje matemático tales nociones idealizadas como, por ejemplo, densidad de una carga puntual, densidad de un punto material, impulso instantáneo, etc.

Explicaremos esto más detalladamente. Al estudiar fenómenos físicos sirviéndonos del aparato matemático, hemos de recurrir inevitablemente a ciertas abstracciones matemáticas, en particular, emplear la noción de punto. Hablamos, por ejemplo, de una masa concentrada en el punto dado de un espacio, de una fuerza aplicada en el momento dado de tiempo (es decir, en el punto dado del eje a lo largo del cual se calcula el tiempo), de una fuente puntual de tal o cual campo físico, etc. Esto resulta ser cómodo al emplear el aparato matemático, aunque en tal caso reproducimos una situación que no es del todo exacta: cualquier masa tiene un volumen bien determinado, toda fuerza actúa durante un determinado lapso, cualquier fuente de un campo tiene dimensiones determinadas, etc. Resulta pues que, para este enfoque del estudio de los fenómentos físicos, los métodos clásicos de las matemáticas son insuficientes. A veces nos vemos obligados a introducir nuevos conceptos matemáticos, crear un aparato matemático nuevo.

Examinemos, a título de ejemplo, la acción de una fuerza "instantánea". Supongamos que en el instante $t = 0$ un cuerpo de masa $m \neq 0$ ha experimentado la acción de una fuerza que le comunicó la velocidad $v \neq 0$, después de lo cual la acción de la fuerza se dio por terminada. Al designar mediante $F(t)$ la fuerza que actúa contra el cuerpo al instante de tiempo t, obtenemos $F(t) = 0$ cuando $t \neq 0$. Trataremos de determinar cuál es la fuerza $F(t)$ cuando $t = 0$. Según la segunda ley de Newton, la fuerza es igual a la velocidad de variación de la cantidad de movimiento respecto del tiempo

$$F(t) = \frac{d(mv)}{dt}$$

y, por consiguiente, para cualquier momento de tiempo τ, $0 < \tau < +\infty$, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\tau} F(t)\,dt = mv. \tag{59.1}$$

Como límite inferior de integración se ha elegido $-\infty$; por supuesto, podemos tomar en lugar de $-\infty$ cualquier número $a < 0$, por cuanto hasta el momento de tiempo $t = 0$ el cuerpo se encontraba en reposo.

Fijemos nuestra atención en que desde el punto de vista de la matemática clásica, es decir, desde el punto de vista de aquel concepto de integral que hemos estudiado, la igualdad (59.1) está privada de sentido: la función $F(x)$ es igual a cero en todos los puntos, salvo en $t = 0$, por eso la integral que figura en el primer miembro de la fórmula (59.1) y que se considera como impropia es igual a cero, mientras que el segundo miembro de esta igualdad no es nulo. Por otra parte, partiendo de los razonamientos físicos, es natural esperar que la igualdad escrita tiene un sentido determinado. Esta contradicción significa que nos encontramos fuera de las posibilidades de emplear el aparato matemático conocido y han de introducirse algunas nuevas nociones matemáticas.

Supongamos, para simplificar, que la cantidad de movimiento adquirido por el cuerpo es igual a la unidad, es decir, $mv = 1$. En este caso la fuerza $F(t)$ que actúa contra el cuerpo se designará mediante $\delta(t)$, por lo cual, la fórmula (59.1) tendrá por expresión

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t)\,dt = 1, \quad \tau > 0. \tag{59.2}$$

La función $\delta(t)$ se llama corrientemente función delta (función δ) o función de Dirac *).

Con el fin de examinar detenidamente la cuestión, supongamos que el cuerpo está accionado no por una fuerza instantánea, sino por cierta fuerza constante que actúa contra el cuerpo durante el lapso de tiempo de $-\varepsilon$ hasta 0 ($\varepsilon > 0$); esta última se designará con $\delta_\varepsilon(t)$. Supongamos también que esta fuerza comunica al cuerpo la misma cantidad de movimiento, igual a la unidad. En otras palabras, distribuyamos

*) P. Dirac (n. 1902), físico inglés.

la fuerza buscada $\delta(t)$ por un intervalo de tiempo de longitud ε. Hallemos la fuerza $\delta_\varepsilon(t)$.

De acuerdo con el principio de conservación de la cantidad de movimiento, para cualquier tiempo $\tau \geqslant 0$ tenemos

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t)\,dt = 1.$$

Por cuanto la fuerza $\delta_\varepsilon(t)$ es nula fuera del segmento $[-\varepsilon, 0]$ y constante dentro del segmento citado, se tiene

$$1 = \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{0} \delta_\varepsilon(t)\,dt = \varepsilon\delta_\varepsilon(t), \quad -\varepsilon \leqslant t \leqslant 0.$$

Por ello

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}, & \text{si} \quad -\varepsilon \leqslant t \leqslant 0 \\ 0, & \text{si} \quad t < -\varepsilon \quad \text{o bien} \quad t > 0. \end{cases} \tag{59.3}$$

Es natural suponer que la fuerza instantánea $\delta(t)$ se obtiene de la "fuerza distribución" $\delta_\varepsilon(t)$, pasando al límite para $\varepsilon \to 0$, es decir,

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t),$$

entonces

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & \text{si} \quad t = 0, \\ 0, & \text{si} \quad t \neq 0. \end{cases} \tag{59.4}$$

Esta formula no permite obtener la (59.2), haciendo uso de las definiciones conocidas de la integral (propia o impropia). El hecho de que la función es nula en todos los puntos, a excepción de uno, donde ella es igual al infinito, y a la vez otro hecho, consistente en que la integral de dicha función es igual a la unidad, contradicen uno al otro dentro de los marcos de la matemática que hoy día se llama clásica. Esto nos lleva a la conclusión sobre la necesidad de introducir un concepto nuevo, el de "integral" (59.2).

Desde el punto de vista físico es natural considerar que la cantidad de movimiento comunicada al cuerpo por la fuerza instantánea $\delta(t)$, es decir, la integral (59.2), es un límite de la cantidad de movimiento comunicada al cuerpo por las fuerzas $\delta_\varepsilon(t)$ distribuidas en tiempo, cuando el lapso de su accionamiento tiende a cero, es decir, cuando $\varepsilon \to 0$. Por eso pongamos, por definición,

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t)\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t)\,dt, \quad \tau > 0.$$

De aquí, en virtud de la igualdad $\int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t)\,dt \equiv 1$, $\tau > 0$ para todo $\varepsilon > 0$, proviene precisamente la igualdad (59.2).

De este modo, cuando se dice que la integral (59.2) de una función delta es igual a la unidad, esta integral debe entenderse como límite de las correspondientes integrales ordinarias de las funciones δ_ε cuando $\varepsilon \to +0$.

Resulta útil dar, de un modo análogo, la definición de las "integrales" más generales, a saber, de las integrales del tipo

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t) f(t)\, dt, \quad -\infty < \tau < +\infty, \tag{59.5}$$

donde $f(t)$ es una función continua. A saber, definamos el símbolo (59.5) mediante la igualdad

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t) f(t)\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) f(t)\, dt. \tag{59.6}$$

Para demostrar que esta definición es correcta, se debe probar que el límite (59.6) siempre existe. Más aún, probemos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) f(t)\, dt = \begin{cases} f(0) & \text{para } \tau \geqslant 0, \\ 0 & \text{para } \tau < 0. \end{cases} \tag{59.7}$$

Sea primero $\tau \geqslant 0$. Al emplear (59.3), obtendremos

$$\left| \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) f(t)\, dt - f(0) \right| = \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{0} f(t)\, dt - \frac{f(0)}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{0} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{0} |f(t) - f(0)|\, dt. \tag{59.8}$$

Por ser la función $f(x)$ continua cuando $x = 0$, para cualquier $\eta > 0$ existe tal $\varepsilon_\eta > 0$ que para todo t que satisfaga la condición $|t| < \varepsilon_\eta$, se cumple la desigualdad

$$|f(t) - f(0)| < \eta.$$

Por ello, para cualquier $\varepsilon < \varepsilon_\eta$, de la desigualdad (59.8) proviene que

$$\left| \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) f(t)\, dt - f(0) \right| < \frac{\eta}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\tau} dt = \eta.$$

La igualdad (59.7) queda demostrada para $\tau \geqslant 0$. Se demuestra de modo aún más fácil cuando $\tau < 0$.

Así pues, de la definición (59.6) se deduce que para cualquier función continua $f(t)$ es válida la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t) f(t)\, dt = \begin{cases} f(0) & \text{para } \tau \geqslant 0, \\ 0 & \text{para } \tau < 0. \end{cases} \tag{59.9}$$

La fórmula (59.2) se desprende de aquí cuando $f(t) \equiv 1$.

Si ponemos

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{para } t < 0, \end{cases} \tag{59.10}$$

la fórmula (59.9), para $f(t) \equiv 1$, se escribirá en la forma

$$\theta(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \delta(t)\, dt. \tag{59.11}$$

La función $\theta(t)$ lleva un nombre especial: se llama *función de Heaviside**). Al calcular la derivada de la función $\theta(t)$, de acuerdo con la definición clásica de derivada, de (59.10) obtenemos

$$\theta'(t) = \begin{cases} \infty & \text{para } t = 0, \\ 0 & \text{para } t \neq 0. \end{cases} \tag{59.12}$$

No sería correcto afirmar a base de lo dicho que $\theta'(t)$ es una función delta, puesto que la función $\delta(t)$ se define no sólo por la función (59.4), pues incluso desde el punto de vista físico está claro que de esta sola fórmula no puede provenir que la fuerza $\delta(t)$ comunica al cuerpo en consideración una cantidad de movimiento que es precisamente igual a la unidad. No obstante, es cómodo poner, por definición,

$$\theta'(t) = \delta(t).$$

Aparte de la igualdad (59.12), esto se justifica por el hecho de que en tal caso queda en vigor la fórmula fundamental del cálculo integral que restablece la función a partir de su derivada, o sea, la fórmula de Newton — Leibniz. En efecto, ahora la fórmula (59.11) puede ser escrita en la forma

$$\theta(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \theta'(t)\, dt, \quad -\infty < \tau < +\infty$$

(observemos que $\theta(-\infty) = 0$).

Ha de notarse que no hemos dado la definición matemática precisa de la propia función $\delta(t)$ en su calidad de función de un punto (se ha observado anteriormente que la fórmula (59.4) no constituye tal definición); esto es imposible en general, puesto que la función delta es un concepto de distinta naturaleza. Entre tanto, fue definida por nosotros no la función $\delta(t)$, sino la "integral" (59.5). No es por casualidad. Para varios problemas de física resulta característica una circunstancia consis-

*) O. Heaviside (1850—1925), físico inglés.

tente en que las funciones, introducidas con el objeto de describir uno u otro objeto, sólo tienen sentido en la medida de que el sentido físico inmediato lo tienen ciertas integrales de dichas funciones. Las funciones generalizadas surgen, pues, como cierta generalización de una familia de integrales del producto de dos funciones, una de las cuales es fija y la otra puede elegirse arbitrariamente de cierta totalidad.

Así pues, hemos definido un concepto nuevo, el de integral de la función delta (e, incluso, el concepto más, general de integral del producto de una función continua por la función delta). Esto no es una integral ordinaria, es decir, no es un límite de ciertas sumas integrales, sino el límite de las integrales correspondientes, o bien, hablando metafóricamente, "un límite de los límites de sumas integrales". En otras palabras, para definir la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)\,dx$ se debe añadir al paso límite, que da el valor de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)f(x)\,dx$, un paso límite más para $\varepsilon \to 0$. Aquí se observa una analogía peculiar con la definición de la integral impropia: partiendo de la definición conocida de la integral, obtenemos, con ayuda de un paso límite complementario, el nuevo concepto matemático. Por supuesto, los pasos límite complementarios en estos casos son diferentes, lo que conduce a los distintos conceptos.

Al definir de un modo nuevo el símbolo (59.5), nos encontramos dentro del círculo de las definiciones matemáticas acostumbradas que hacen más amplio el bagaje de conceptos que hemos tratado anteriomente; hemos logrado establecer una propiedad interesante de la función $\delta(t)$ (véase (59.9)): dicha función pone a toda función continua $f(t)$ en correspondencia un número $f(0)$, es decir, $\delta(t)$ puede considerarse como una función definida en el conjunto de todas las funciones continuas. Las aplicaciones cuyos dominios de definición representan en sí ciertos conjuntos de funciones llevan el nombre de *funcionales*. La función delta es precisamente uno de los más simples ejemplos de funcionales. Las funciones generalizadas mencionadas al principio de este punto, se llaman funcionales del tipo determinado (véase el p. 59.2).

Según se vio, las propiedades de la función delta se determinan por las propiedades de las funciones $\delta_\varepsilon(x)$. Si tomamos $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, se obtendrá una sucesión de funciones la cual, al igual que las sucesiones análogas a la mencionada en un sentido determinado, se llama sucesión en delta (la definición precisa de las sucesiones en delta se dará más abajo: véase el ejercicio 6 en el p. 59.3). Cualquier sucesión en delta puede servir para definir la propiedad (59.9) de la función delta. Cabe notar que ya nos encontramos antes con las sucesiones en delta: a título de ejemplo de tal sucesión sirve la sucesión de los núcleos de Fejer $\Phi_n(n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Sin embargo, no fijamos nuestra atención en las sucesiones de esta índole, por cuanto ellas no fueron el objeto de estudio especial y desempeñaban un papel auxiliar.

Pasemos ahora al estudio sistemático de las funciones generalizadas. Algunas de las funciones generalizadas han aparecido primeramente en las obras de P. Dirac y otros físicos en calidad de un método simbólico para describir ciertos fenómenos físicos. Con el fin de emplear estos conceptos a título de método de la investigación

teórica, tuvo que surgir la necesidad de crear la teoría de funciones generalizadas, lo que se ha hecho. La teoría de las funciones generalizadas es ahora un aparato matemático muy útil. Con ayuda de esta teoría se ha logrado resolver toda una serie de problemas que no podían ser resueltos mediante los métodos antigous. En el presente las funciones generalizadas se utilizan ampliamente tanto en las inverstigaciones aplicadas como en las matemáticas puras.

En los puntos ulteriores de este párrafo expondremos los fundamentos de la teoría general de las funciones generalizadas, elaborada por S. L. Sóbolev y L. Schwartz*).

59.2. ESPACIOS LINEALES CON CONVERGENCIA. FUNCIONALES. ESPACIOS CONJUGADOS

Definición 1. *Sea X cierto conjunto y supongamos que en la totalidad de todas las sucesiones $\{x_n\}$ de sus elementos, $x_n \in X$, se ha distinguido una clase de sucesiones, llamadas convergentes, y a toda sucesión convergente se le ha puesto en correspondencia un elemento $x \in X$, llamado límite de dicha sucesión.*

Si en este caso se cumplen tres condiciones:

1) cada sucesión de elementos del conjunto X puede tener no más de un límite;

2) toda sucesión del tipo $\{x, x, x, \ldots, x, \ldots\}$ es convergente y el elemento x es su límite;

3) toda subsucesión de una sucesión convergente es también convergente y tiene el mismo límite que toda la sucesión,

entonces el conjunto X se denomina espacio con convergencia.

Las condiciones 1, 2 y 3 se llaman *axiomas de Fréchet***).

Si x es el límite de la sucesión $\{x_n\}$, entonces, como siempre, se escribe

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Definición 2. *Un espacio lineal X se llama espacio lineal con convergencia, si es un espacio con convergencia, respecto de la cual las operaciones de sumación de los elementos del espacio y de su multiplicación por un número son continuas.*

Esto significa que para cualesquiera sucesiones convergentes $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ de elementos de X, que tienen por límites $x \in X$ e $y \in X$, respectivamente, y cualesquiera números λ y μ la sucesión $\{\lambda x_n + \mu y_n\}$ es también convergente y

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda x + \mu y.$$

Además, si $\{\lambda_n\}$ es una sucesión numérica y $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$, entonces $\lim_{n\to\infty} \lambda_n x = \lambda x$ para cualquier $x \in X$.

Como espacios lineas con convergencia pueden indicarse los espacios lineales normalizados; no obstante, existen espacios lineales con convergencia en los que no

*) S. L. Sóbolev (n. 1908), matemático soviético; Schwartz L. (n. 1915), matemático francés.

**) Fréchet M. R. (1878—1973), matemático francés.

puede introducirse una norma que engendra la convergencia dada de sucesiones.

Definición 3. *Las aplicaciones del espcio lineal X en el conjunto de números reales $\boldsymbol{R}$ (o en el conjunto de números complejos $\boldsymbol{C}$) reciben el nombre de funcionales definidas en dicho espacio o funcionales sobre dicho espacio. El valor de la funcional f en el punto x del espacio lineal X se designa con (f, x), es decir, igual que el producto escalar de los elementos f y x en el espacio lineal X provisto de un producto escalar.*

Esta designación se justifica, en particular, por el hecho de que el producto escalar (y, x) es, cuando el elemento y es fijo, una funcional definida sobre el espacio mencionado X.

Definición 4. *Sea X un espacio lineal. La funcional f definida sobre este espacio, se llama lineal (con más precisión, lineal homogénea), si para cualesquiera elementos $x \in X$, $y \in X$ y cualesquiera números λ, μ se cumple la condición*

$$(f, \lambda x + \mu y) = \lambda(f, x) + \mu(f, y).$$

Definición 5. *La funcional f, definida sobre un espacio lineal X con convergencia, se denomina continua, si para toda sucesión convergente $x_n \in X$, $\lim_{n \to \infty} x_n = x$, se cumple la condición*

$$\lim_{n \to \infty} (f, x_n) = (f, x).$$

Las funcionales, como cualesquiera funciones numéricas, pueden sumarse, multiplicarse una por la otra, en particular, por un número. Por ejemplo, si f y g son las funcionales, entonces el valor de la funcional $\alpha f + \beta g$ (α y β son unos números) en el punto $x \in X$ se determina según la fórmula

$$(\alpha f + \beta g, x) = \alpha(f, x) + \beta(g, x).$$

Lema 1. *Las funcionales continuas lineales forman un espacio lineal.*

DEMOSTRACIÓN. Sean f y g las funciones lineales y sean α y β unos números. Mostremos que $\alpha f + \beta g$ es también una funcional lineal:

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g, \lambda x + \mu y) &= \alpha(f, \lambda x + \mu y) + \beta(g, \lambda x + \mu y) = \\ &= \alpha[\lambda(f, x) + \mu(f, y)] + \beta[\lambda(g, x) + \mu(g, y)] = \\ &= \lambda[\alpha(f, x) + \beta(g, x)] + \mu[\alpha(f, y) + \beta(g, y)] = \\ &= \lambda(\alpha f + \beta g, x) + \mu(\alpha f + \beta g), y),\end{aligned}$$

es decir, $\alpha f + \beta g$ es una funcional lineal.

Supongamos ahora que f y g son funcionales continuas. Probemos que en este caso $\alpha f + \beta g$ es también una funcional continua. Sea $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n \to \infty} (\alpha f + \beta g, x_n) &= \lim_{n \to \infty} [\alpha(f, x_n) + \beta(g, x_n)] = \\ &= \alpha \lim_{n \to \infty} (f, x_n) + \beta \lim_{n \to \infty} (g, x_n) = \alpha(f, x) + \beta(g, x) = (\alpha f + \beta g, x).\end{aligned}$$

De este modo, en un conjunto de funcionales continuas lineales están definidas de un modo natural las operaciones de su sumación y multiplicación por un número. El cumplimiento, para dichas operaciones, de los axiomas del espacio lineal se comprueba sin dificultades algunas. □

En un espacio lineal de funcionales continuas lineales del espacio X el concepto de convergencia de las sucesiones se determina de la manera siguiente.

Definición 6. *Una sucesión de funcionales f_n, $n = 1, 2, \ldots$ se denomina convergente hacia la funcional f, si la sucesión de los valores de las funcionales f_n converge en todo punto $x \in X$ al valor de la funcional f en este punto, en otras palabras, si para cualquier elemento $x \in X$ la sucesión numérica $\{(f_n, x)\}$ converge hacia el número (f, x).*

De este modo, la afirmación $\lim_{n \to \infty} f_n = f$ es equivalente a la siguiente:

$$\lim_{n \to \infty} (f_n, x) = (f, x) \text{ para todo } x \in X.$$

Definida de este modo la convergencia de las funcionales, las operaciones de su sumación y multiplicación por un número son continuas (esto se deduce inmediatamente de la linealidad de funcionales y de la propiedad de los límites de las sucesiones numéricas), y, por consiguiente, si introducimos el concepto de convergencia de las funcionales conforme a la definición 6, resultará lícita la siguiente afirmación que se enunciará en forma de un lema.

Lema 2. *Las funcionales continuas lineales, definidas sobre un espacio con convergencia, forman también un espacio lineal con convergencia.*

Definición 7. *Un espacio lineal con convergencia cuyos elementos son las funcionales continuas lineales, definidas sobre el espacio X, se llama espacio conjugado de X.*

Sean X e Y los espacios lineales con convergencia, con la particularidad de que todo elemento del espacio X es un elemento del espacio Y y supongamos que cualquier sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, convergente en X hacia el elemento x, converge hacia x también en el espacio Y. En este caso se escribirá

$$X \hookrightarrow Y.$$

Definición 8. *Se dice que una funcional continua lineal f, definida sobre el espacio $X \hookrightarrow Y$, es prolongable al espacio Y en una funcional continua lineal, si existe tal funcional continua lineal F, definida sobre el espacio Y, que $(F, x) = (f, x)$ para todo $x \in X$ (es decir, $F = f$ en Y). En este caso la funcional F lleva el nombre de prolongación de la funcional f.*

Ejercicio 1. Sean X e Y los espacios lineales con convergencia. Demúestrese que si $X \hookrightarrow Y$ y el conjunto X es denso en el espacio Y (es decir, cada elemento del espacio Y es el límite en este espacio para la sucesión de elementos de X), entonces cualquier funcional continua lineal del espacio X, si se prolonga en una funcional continua lineal del espacio Y, es prolongable de un modo único.

Igual que para las aplicaciones de cualesquiera espacios lineales, para los espacios con convergencia tiene sentido el concepto de aplicación lineal (operator lineal) de un espacio con convergencia en otro espacio de este mismo género (véase la definición 17 en el p. 57.2). Introduzcamos, además, el concepto de aplicación continua de un espacio lineal con convergencia en otro espacio con convergencia.

Definición 9. *Sean X_1 y X_2 dos espacios lineales con convergencia. La aplicación Φ del espacio X_1 en X_2 (en este caso la aplicación se denomina también operador) se llama continua en el punto $x_0 \in X_1$, si, cualquiera que sea la sucesión $x_n \in X_1$, $n = 1, 2, \dots$, convergente en el espacio X_1 hacia el punto x_0, la sucesión $\Phi(x_n) \in X_2$, $n = 1, 2, \dots$, converge en X_2 al elemento $\Phi(x_0)$.*

En otras palabras, la aplicación Φ es continua en el punto x_0, si de $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = n_0$ proviene que $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(x_n) = \Phi(x_0)$.

Lema 3. *Si la aplicación lineal Φ del espacio lineal con convergencia X_1 en el espacio lineal con convergencia X_2 es continua en el cero del espacio X_1, será continua en todo punto de X_1.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x_0 \in X$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$; entonces $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - x_0) = 0$. Por cuanto la aplicación Φ es continua en el cero,

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(x_n - x_0) = 0.$$

Ya que la aplicación Φ es lineal, se tiene

$$\Phi(x_n - x_0) = \Phi(x_n) - \Phi(x_0)$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} [\Phi(x_n) - \Phi(x_0)] = 0, \quad \text{de donde} \quad \lim_{n\to\infty} \Phi(x_n) = \Phi(x_0).$$

De este modo, la aplicación Φ es continua en todo punto $x_0 \in X_1$. □

Definición 10. *La aplicación Φ de un espacio lineal con convergencia X_1 en otro espacio lineal con convergencia X_2 se denomina continua en X_1, si es continua en todo punto del espacio X_1.*

Para todo espacio lineal con convergencia X tienen sentido los conceptos de serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, de serie convergente y de suma de ésta. Estos conceptos se introducen por analogía con el caso de los espacios lineales normalizados. Esto resulta posible, por cuanto en las definiciones correspondientes de las propiedades de una norma se emplea sólo aquella que atestigua que en todo espacio normalizado queda definido el concepto de sucesión convergente.

Los ejemplos de aplicaciones lineales y continuas de los espacios con convergencia se darán en el p. 59.6 y en el 59.7.

59.3. DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES GENERALIZADAS. ESPACIOS D Y D'

Definamos, ante todo, un espacio lineal de funciones D que será el concepto principal en nuestros razonamientos. Con este fin consideraremos las funciones que vienen dadas en el conjunto de todos los números reales $\boldsymbol{R}$ y que toman valores complejos.

El espacio D, que nos interesa, se compone de las funciones finitas infinitamente derivables (véase en el p. 55.2 la definición de funciones finitas). Todas las fun-

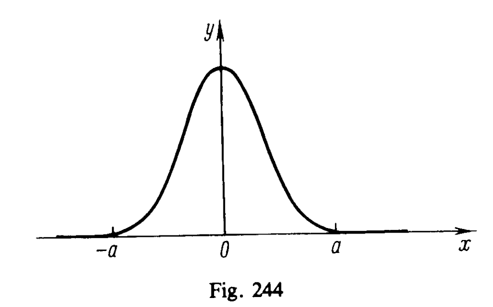


Fig. 244

ciones finitas, siendo definidas del modo natural las operaciones de su sumación y multiplicación por un número, forman un espacio lineal, y las funciones finitas infinitamente derivables forman un subespacio de dicho espacio. Introduzcamos en este subespacio el concepto de convergencia de las sucesiones.

Definición 11. *Una sucesión de las funciones finitas infinitamente derivables φ_n, $n = 1, 2, \dots$, se llama convergente hacia la función finita infinitamente derivable φ, si:*

1) existe un segmento $[a, b]$, fuera del cual todas las funciones ψ_n, $n = 1, 2, \dots$, y ψ se anulan);*

2) en dicho segmento la sucesión de funciones φ_n, $n = 1, 2, \dots$, y las sucesiones de todas sus derivadas $\varphi_n^{(k)}$, $n = 1, 2, \dots$, convergen uniformemente hacia la función φ y a sus correspondientes derivadas $\varphi^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, respectivamente.

Una totalidad de las funciones finitas infinitamente derivables con la operación introducida de paso límite constituye un espacio lineal con convergencia. Esto se deduce inmediatamente de las propiedades de los límites de funciones y de las propiedades de las sucesiones uniformemente convergentes.

Definición 12. *Un espacio de funciones finitas infinitamente derivables con convergencia introducida lleva el nombre de espacio D de funciones principales.*

Evidentemente, si $\varphi \in D$, toda derivada de la función φ pertenecerá también al espacio D.

Diremos además que si $\{\varphi_n\}$ converge hacia φ en D, entonces la sucesión $\{\varphi_n^{(k)}\}$ de las derivadas de cualquier orden $k = 1, 2, \dots$ converge hacia $\varphi^{(k)}$ en D. Esta propiedad proviene directamente de la definición de convergencia en el espacio D.

Como ejemplo trivial de una función del espacio D sirve la función igual a cero en todo el eje y como ejemplo menos trivial, la función $\varphi_a(x)$ (fig. 244).

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2 - x^2}}, & \text{si} \quad |x| < a, \\ 0, & \text{si} \quad |x| \geqslant a. \end{cases} \tag{59.13}$$

*) El segmento $[a, b]$ contiene los portadores de todas las funciones φ, φ_n, $n = 1, 2, \dots$.

Ejercicios. 2. Demuéstrese que la función (59.13) es infinitamente derivable en todo el eje numérico (compárese con (37.25)).

3. Demuéstrese que con miras de lograr que para la función $\varphi \in D$ exista una función $\psi \in D$ tal que sea $\varphi = \psi'$, es necesario y suficiente que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = 0$.

Definición 13. *Toda funcional continua lineal f, definida sobre D, recibe el nombre de función generalizada.*

Definición 14. *Una funcional f, definida en todo el eje real, se denomina localmente integrable, si es absolutamente integrable en cualquier segmento finito.*

Si f es una función localmente integrable y $\varphi \in D$, el producto f_φ es absolutamente integrable en todo el eje. En efecto, sea $\operatorname{supp} \varphi \subset [a, b]$ (véase en el p. 55.2 la definición del portador $\operatorname{supp} \varphi$ de la función φ); la función φ es, obviamente, acotada: $|\varphi(x)| \leqslant C$, $-\infty < x < +\infty$, por lo cual

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\,\varphi(x)|\,dx = \int_a^b |f(x)\varphi(x)|\,dx \leqslant C \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Definamos, para la función localmente integrable f, la funcional (f, φ) sobre D mediante la igualdad

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{59.14}$$

Esta funcional es lineal y continua. Su linealidad es obvia; demostremos su continuidad. Sea $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ en D. En este caso existe un segmento $[a, b]$ tal que para todo $n = 1, 2, \ldots$, tienen lugar las inclusiones $\operatorname{supp} \varphi_n \subset [a, b]$ y $\operatorname{supp} \varphi \subset [a, b]$; por eso

$$|(f, \varphi) - (f, \varphi_n)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,|\varphi(x) - \varphi_n(x)|\,dx =$$

$$= \int_a^b |f(x)|\,|\varphi(x) - \varphi_n(x)|\,dx \leqslant \sup_{[a,b]} |\varphi(x) - \varphi_n(x)| \int_a^b |f(x)|\,dx \to 0$$

para $n \to \infty$. De este modo, a toda función localmente integrable $f(x)$ le corresponde una función generalizada (f, φ) *); en este sentido toda función localmente integrable puede considerarse como una función generalizada.

Una función constante, es decir, tal función generalizada f que $(f, \varphi) = c \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$, c es una constante, $\varphi \in D$ (en particular, la función nula), se genera por una función localmente integrable $f(x) = c$, $-\infty < x < +\infty$.

*) En este caso suele decirse también que la función generalizada (f, φ) se genera por la función f.

Recordemos que por funcional lineal se entiende siempre una funcional lineal homogénea. Por esta razón, la funcional f, que es igual a una misma constante c, en todos los elementos de cierto espacio lineal X, aunque es una función lineal, no es, sin embargo, homogénea: si $x \in X$, $y \in X$, λ y μ son unos números, entonces para la funcional mencionada tendremos $f(x) = f(y) = f(\lambda x + \mu y) = c$. Si fuera lineal homogénea, debería verificarse $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = (\lambda + \mu)c$. Por cuanto para $\lambda + \mu \neq 1$ se tiene $f(\lambda x + \mu y) \neq \lambda f(x) + \mu f(y)$, entonces la funcional f no es linealmente homogénea. Por consiguiente, una funcional, igual a una constante, no pertenece a la clase de funcionales que se considera.

Ejercicio 4. Demuéstrese que dos funciones continuas en un eje numérico son distintas cuando, y sólo cuando, son distintas las funciones generalizadas engendradas por las primeras.

A veces, las funciones generalizadas se designan mediante el símbolo $f(x)$. Esta designación es simbólica pura; no significa ni mucho menos el valor de la función generalizada en el punto $x \in R$, sino sólo refleja el hecho de que las funciones generalizadas son, en el sentido señalado más arriba, una generalización de las funciones (localmente integrables) ordinarias; no se presupone ningún valor de la función generalizada en el punto x.

Para denotar el valor de la función generalizada f en el punto $\varphi = \varphi(x)$ del espacio D, a la par con la notación (f, φ) se usa también la inscripción

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{59.15}$$

De este modo, por definición,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = (f, \varphi).$$

Esta igualdad constituye la definición del símbolo (59.15), el cual se lee formalmente como "integral del producto de f por φ". Dicha notación refleja el hecho de que las funciones generalizadas son una generalización de las funcionales (59.14), donde f es una función localmente integrable.

Ejercicio 5. Demuéstrese que la funcional *v.p.* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$, $\varphi \in D$, es una función generalizada $\left(\textit{se denota habitualmente } \mathscr{P}\frac{1}{x}\right)$.

A título de otro ejemplo de una función generalizada consideraremos una funcional designada por $\delta = \delta(x)$ y llamada función delta (véase 59.1).

Definición 15. *Una funcional definida por la fórmula*

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0),\ \varphi \in D,$$

se denomina función delta.

La linealidad y continuidad de dicha funcional se comprueban fácilmente. No puede ser representada en la forma (59.14), cualquiera que sea la función localmen-

te integrable f. Efectivamente, si se encontrara una función localmente integrable f tal que

$$(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in D,$$

entonces para esta función f y para la función φ, dada mediante la fórmula (59.13), tendríamos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0) = \frac{1}{e}. \tag{59.16}$$

Mas, por ser la función f absolutamente integrable,

$$\lim_{a \to 0} \int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx = 0$$

(¿por qué?).

Luego, al observar que $e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} < \frac{1}{e}$, $-a \leqslant x \leqslant a$, obtenemos

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx \right| = \left| \int_{-a}^{a} f(x) e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} dx \right| \leqslant \frac{1}{e} \int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx,$$

razón por la cual el primer miembro de la igualdad (59.16) tiende a cero cuando $a \to 0$. mientras que el segundo miembro no tiende a cero. La contradicción obtenida demuestra precisamente nuestra afirmación. De este modo, la reserva de funciones generalizadas en el sentido indicado es mayor que el de funciones ordinarias.

Definición 16. *Una funcional que a toda función $\varphi \in D$ le pone en correspondencia un número $\varphi(x_0)$, donde x_0 es fijo, también se llama función delta y se denota mediante $\delta(x - x_0)$.*

Recurriendo a la notación (59.15), podemos escribir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)\varphi(x)\,dx = \varphi(x_0), \quad \varphi \in D.$$

Definición 17. *Una totalidad de funciones generalizadas, al igual que toda totalidad de funcionales, definidas sobre un espacio lineal con convergencia (véase el p. 59.2), forma un espacio lineal con convergencia conjugado de D. Se llama espacio de funciones generalizadas y se denota con D'.*

Así pues, la convergencia de una sucesión de funciones generalizadas f_n, $n = 1, 2, \ldots$, hacia la función generalizada f significa que

$$\lim_{n \to \infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi)$$

para cualquier función $\varphi \in D$.

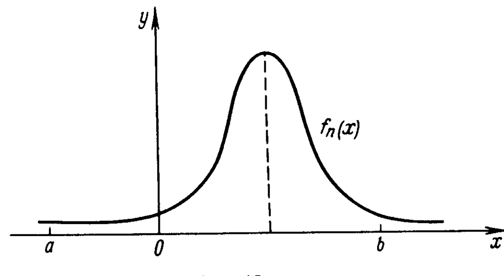


Fig. 245

Problema 40. Sea $f_n \in D'$, $n = 1, 2, \ldots$, y supongamos que para cualquier función $\varphi \in D$ existe un límite de la sucesión numérica (f_n, φ). Pongamos $F(\varphi) = \lim\limits_{n \to \infty} (f_n, \varphi)$. Demuéstrese que $F(\varphi)$ es una función generalizada.

En el p. 59.1 se han considerado las funciones $\delta_\varepsilon(x)$ que son, con evidencia, localmente integrables. Hemos visto que poseen la propiedad de que para cualquier función continua en todo el eje φ, y por lo tanto, para cualquier función $\varphi \in D$ se tiene

$$\lim_{\varepsilon \to +0} (\delta_\varepsilon, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

Desde el punto de vista de las funciones generalizadas esto significa que en D'.

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \delta_\varepsilon = \delta^{*)}.$$

De este modo, la función delta en el espacio D' es un límite de una sucesión de funciones generalizadas engendradas por las funciones localmente integrables.

Ejercicios. 6. Supongamos que la sucesión de funciones absolutamente integrables $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, es tal que

a) cualquiera que sea el número $M > 0$, para $|a| < M$, $|b| < M$, las magnitudes

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx \right|, \quad n = 1, 2, \ldots$$

están acotadas por una constante que no depende de a, b, n (sólo depende de M);

b) cualesquiera que sean a y b fijos y distintos de cero,

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad a < b < 0 \text{ y } 0 < a < b, \\ 1 & \text{para} \quad a < 0 < b. \end{cases}$$

Las sucesiones de este género se denominan *sucesiones en delta* (fig. 245).

*) Al igual que en el caso de las funciones ordinarias, el símbolo $\varepsilon \to +0$ significa que la relación límite mencionada tiene lugar para cualquier sucesión $\varepsilon_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, que tiende a cero.

Demuéstrese que para cualquier función continua φ y cualquier sucesión en delta $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0);$$

en otras palabras, $\lim_{n \to \infty} (f_n, \varphi) = (\delta, \varphi)$

7. Sea $f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{t}}$. Demuéstrese que en el espacio D' se verifica la igualdad $\lim_{t \to +0} f_t(x) = \delta(x)$.

8. Demuéstrese que en el espacio D' existe el límite $\lim_{y \to 0} \frac{1}{x \pm iy}$ $\left(\text{se denota con } \frac{1}{x \pm i0}\right)$ y que son válidas las fórmulas

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi\delta(x) + \mathscr{P}\frac{1}{x}.$$

(estas fórmulas llevan el nombre de Sojotski *)).

Problema 41. Demuéstrese que toda función generalizada singular es el límite de funciones regulares (en este sentido un espacio de las funciones generalizadas es el "complemento" del espacio de funciones ordinarias).

Como ya hemos visto, el concepto de función generalizada no se reduce al de función de un punto, por lo cual, en general, no hay sentido en hablar del valor de una función generalizada en el punto dado, en particular, de la reducción de esta función a cero en dicho punto. Sin embargo, se puede introducir un concepto natural de reducción a cero de una función generalizada en un intervalo.

Definición 18. *Diremos que una función generalizadad f se reduce a cero en el intervalo (a, b), si $(f, \varphi) = 0$ para cualquier $\varphi \in D$, que dispone de un portador contenido dentro del intervalo (a, b).*

Ejercicio 9. Demuéstrese que con el fin de lograr que una función continua se reduzca a cero en todo punto de un intervalo, es necesario y suficiente que se reduzca a cero en dicho intervalo como una función generalizada.

Definición 19. *Las funciones generalizadas f y g se llaman iguales en el intervalo (a, b), si $f - g = 0$ en (a, b).*

59.4. DERIVACIÓN DE LAS FUNCIONES GENERALIZADAS

Determinemos ahora la derivada de una función generalizada. Aclaremos, ante todo, qué representa en sí la derivada de una función ordinaria f, continuamente derivable en todo el eje numérico, cuando dicha derivada se considera como la funcional (f', φ) en D. Esto tiene sentido, por cuanto la derivada f', siendo continua en todo el eje numérico, es una función localmente integrable.

Integrando por partes, por ser finita la función $\varphi \in D$, obtendremos

*) Yu. V. Sojotski (1842—1929), matemático ruso.

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -(f, \varphi'), \tag{59.17}$$

donde, como se sabe, $\varphi' \in D$. De este modo, la derivada f' es una funcional sobre D cuyos valores se expresan en términos de los valores de la función f, considerada como una funcional, por medio de la fórmula (59.17). Esto hace natural la siguiente definición.

Definición 20. *Se llama derivada de la función generalizada f una funcional sobre D, denotada con f' y determianda por la igualdad*

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'), \quad \varphi \in D. \tag{59.18}$$

En otras palabras, el valor de la funcional f' en cualquier punto φ del espacio D es igual al valor de la funcional f en el punto $\varphi' \in D$ tomada con el signo opuesto.

Así pues, cualquier función generalizada tiene una derivada. De aquí proviene que toda función localmente derivable también tiene derivada en el sentido de la definición 20.

De la fórmula (59.17) se deduce que la derivada en el sentido habitual de una función continuamente derivable en todo el eje numérico, considerada como funcional sobre D, coincide con la derivada de dicha función en el sentido de las funciones generalizadas.

La operación de cálculo de la derivada de una función generalizada la llaman, por analogía con el caso de las funciones ordinarias, derivación.

Lema 4. *La funcional f' es lineal continua y, por lo tanto, constituye una función generalizada.*

DEMOSTRACIÓN. Comprobemos la linealidad:

$$(f', \lambda\varphi + \mu\psi) = -(f, (\lambda\varphi + \mu\psi')) = -(f, \lambda\varphi' + \mu\psi') =$$
$$= -\lambda(f, \varphi') - \mu(f, \psi') = \lambda(f', \varphi) + \mu(f', \psi), \quad \varphi \in D, \quad \psi \in D.$$

Para comprobar la continuidad de la funcional f, recordemos que si $\varphi \in D$, $\varphi_k \in D$, $k = 1, 2, \dots$, y $\lim_{k \to \infty} \varphi_k = \varphi$ en D, entonces, en virtud de la definición de convergencia en el espacio D, también $\lim_{k \to \infty} \varphi_k' = \varphi'$ en D; por ello, si $\varphi_k \to \varphi$ en D, entonces $\lim_{k \to \infty} (f', \varphi_k) = -\lim_{k \to \infty} (f, \varphi_k') = -(f, \varphi') = (f', \varphi)$.

De este modo, si $f \in D'$, entonces f' existe siempre y $f' \in D'$. □

Las derivadas de órdenes superiores de una función generalizada se determinan sucesivamente, al igual que en el caso de las funciones ordinarias:

$$f'' = (f')', \quad f''' = (f'')', \dots,$$

en general

$$f^{(k)} = (f^{(k-1)})' \quad k = 1, 2, \dots, f^{(0)} = f.$$

Por inducción se comprueba con facilidad que

$$(f^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (f, \varphi^{(k)}), \quad \varphi \in D, \quad k = 0, 1, \dots.$$

Conforme a esta definición, las funciones generalizadas tienen derivadas de cualesquiera órdenes o, como se dice a veces, son infinitamente derivables.

Ejemplos. 1. Sea

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La función $\theta(x)$ lleva el nombre *de Heaviside* (véase (59.10)) o de función unidad. Es localmente integrable y por esta razón puede considerarse como una función generalizada. Hallemos su derivada. De acuerdo con la definición (59.18),

$$(\theta', \varphi) = -(\theta, \varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\,dx =$$

$$= \varphi(0) = (\delta, \varphi), \quad \varphi \in D,$$

es decir, $\theta' = \delta$ (compárese con el p. 59.1).

2. Calculemos, a título de otro ejemplo, las derivadas de la función delta

$$(\delta^{(k)}, \varphi) = (-1)^k(\delta, \varphi^{(k)}) = (-1)^k\varphi^{(k)}(0).$$

Ejercicios. 10. Sean f y g las funciones generalizadas y sean λ y μ unos números. Demuéstrese que

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

11. Demuéstrese que $\left(\dfrac{d}{dx} + \lambda\right) \theta(x)e^{-\lambda x} = \delta(x)$.

12. Demuéstrese que $\left(\dfrac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right) \dfrac{\theta(x)\operatorname{sen}\omega x}{\omega} = \delta(x)$.

13. Si $\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} & \text{para } |x| < \dfrac{\varepsilon}{2}; \\ 0 & \text{para } |x| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}; \end{cases}$, entonces en el espacio de las funciones generalizadas

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x) = \delta(x) \quad \text{y} \quad \delta_\varepsilon'(x) = \frac{\delta\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \delta\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon}.$$

14. Sea $f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ para } x < x_0, \\ f_2(x) \text{ para } x > x_0 \end{cases}$ donde las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son continuamente derivables y existen los límites $f'(x_0 \pm 0)$. Hállese la derivada $f'(x)$ en el espacio D

15. Sea $f(x)$ una función continuamente derivable en todo el eje numérico. Hállese la derivada $(\theta f)'$ en el espacio D'.

16. Demuéstrese que en el espacio D' es válida la fórmula $\mathscr{P}\dfrac{1}{x} = (\ln|x|)'$ (véase el ejercicio 5).

17. Demuéstrese que en el espacio D' se verifica la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2k\pi).$$

Indicación: hágase uso de la fórmula (véase el ejemplo 3 en el p. 55.4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

Lema 5. *Sea $f_n \in D'$, $f \in D'$ y*

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f; \tag{59.19}$$

en este caso también

$$\lim_{n\to\infty} f_n' = f', \tag{59.20}$$

es decir, para toda sucesión de funciones generalizadas convergente en D' la derivada de la función límite es igual al límite de la sucesión de las derivadas.

DEMOSTRACIÓN. Para cualquier función $\varphi \in D$

$$(f', \varphi) - (f_n', \varphi) = -[(f, \varphi') - (f_n, \varphi')] \to 0 \text{ para } n \to \infty,$$

pues $\varphi' \in D$. □

Pueden considerarse también las series de las funciones generalizadas

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{59.21}$$

donde $u_n \in D'$, $n = 1, 2, \ldots$. La suma

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

se llama *suma parcial de n-ésimo orden* ($n = 1, 2, \ldots$) de la serie (59.21). La serie (59.21) se llama *convergente*, si en D' existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

La función generalizada s lleva el nombre de suma de la serie (59.21); se escribe en este caso

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Lema 6. *Una serie convergente de las funciones generalizadas puede derivarse término por término tantas veces como se quiera:*

$$s^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}, \; k = 1, 2, \ldots .$$

Esto se deduce del lema 5.

59.5. ESPACIO DE LAS FUNCIONES PRINCIPALES S Y ESPACIO DE LAS FUNCIONES GENERALIZADAS S'.

Designemos con S el conjunto de todas las funciones de valores complejos infinitamente derivables en todo el eje numérico, las cuales, al igual que todas las derivadas suyas, tienden a cero, para $x \to \infty$, más rápido que cualquier potencia de $\frac{1}{x}$. En otras palabras, el conjunto S se compone de aquellas, y sólo aquellas, funciones infinitamente derivables φ, para las cuales se cumple la condición

$$\lim_{x \to \infty} x^n \varphi^{(m)}(x) = 0, \qquad (59.22)$$

cualesquiera que sean n y m enteros y no negativos. La condición de pertenencia de la función φ al conjunto S puede formularse de una manera algo diferente: una función infinitamente derivable φ pertenece a S cuando, y sólo cuando, para cualesquiera n y m enteros y no negativos se tiene

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |x^n \varphi^{(m)}(x)| = c_{n,m} < \infty. \qquad (59.23)$$

En efecto, si esto es así, entonces, al sustituir en (59.23) n por $n + 1$, obtendremos $|x^{n+1}\varphi^{(m)}(x)| \leqslant c_{n+1,m}$, por lo cual

$$|x^n \varphi^{(m)}(x)| \leqslant \frac{c_{n+1,m}}{|x|},$$

de donde proviene (59.22). Viceversa, de (59.22) y del hecho de que $x^n\varphi^{(m)}(x)$ es acotada en cualquier segmento, se deduce (59.23).

Es evidente que el conjunto S es un espacio lineal. En tal caso si $\varphi \in S$, entonces cualquier derivada de la función φ también pertenece al espacio S.

Definición 21. *Una sucesión de funciones $\varphi_k(x) \in S$, $k = 1, 2, \ldots$, se llama convergente en S hacia la función $\varphi(x) \in S$, si para cualesquiera n y m enteros y no negativos toda sucesión $x^n\varphi_k^{(m)}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, converge uniformemente en todo el eje hacia la función $x^n\varphi^{(m)}(x)$.*

Es evidente que $\lim\limits_{k \to \infty} \varphi_k = \varphi$ en S cuando, y sólo cuando, para cualesquiera n y m enteros y no negativos se verifica

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{-\infty < x < +\infty} |x^n[\varphi_k^{(m)}(x) - \varphi^{(m)}(x)]| = 0. \qquad (59.24)$$

Ha de notarse que si $\varphi_k \to \varphi$ en S, entonces para las derivadas de cualquier orden $\varphi_k^{(m)} \to \varphi^{(m)}$ en S, $m = 1, 2, \ldots$. El espacio lineal S con la operación introducida de paso límite será un espacio lineal con convergencia.

Evidentemente, $D \hookrightarrow S$, en particular, la sucesión de funciones $\varphi_k \in D$, $k = 1, 2, \ldots$, convergente en D hacia la función φ, converge a la función φ también en S. Además, $D \neq S$, pues $e^{-x^2} \in S$, pero $e^{-x^2} \notin D$.

Problema 42. Demuéstrese que el espacio D es denso en S, es decir, cualquier función $\varphi \in S$ es un límite en S para cierta sucesión de funciones $\varphi_k \in D$, $k = 1, 2, \ldots$.

Definición 22. *Una funcional continua lineal, definida sobre el espacio S, se denomina función generalizada de crecimiento lento. Un conjunto de todas las funcionales de esta índole se llama espacio de funciones generalizadas de crecimiento lento y se denota por S'.*

Toda funcional $f \in S'$, considerada sólo en el conjunto D, es una función generalizada, por consiguiente, un elemento del conjunto S' puede ser interpretado como prolongación de cierta funcional continua lineal desde el conjunto D a S (véase el p. 59.2). Por ejemplo, la funcional δ, definida en el p. 59.3 sobre el espacio D mediante la fórmula $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$, $\varphi \in D$, puede ser prolongada con ayuda de la misma fórmula al espacio S.

Se puede mostrar que no toda función generalizada de D' puede ser prolonga da a S y en este sentido podemos decir que S' constituye una parte esctricta de D'.

Ejercicio 18. Demuéstrese que una función generalizada, engendrada por la función localmente integrable e^x, no puede ser prolongada al elemento del espacio S

Toda función localmente integrable $f(x)$, para la cual en cierto entorno de ∞ se verifica la estimación

$$|f(x)| \leqslant A|x|^k \qquad (59.25)$$

(A y k son unas constantes no negativas) *), en particular, cualquier polinomio engendra una funcional del espacio D prolongable a la funcional continua lineal sobre S. Ésta se determina según la fórmula

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in S. \qquad (59.26)$$

Efectivamente, de las condiciones (59.22) y (59.25) proviene que $f(x)\varphi(x) \to 0$, para $x \to \infty$, más rápido que cualquier potencia de $\frac{1}{x}$, y por lo tanto, la integral (59.26) existe.

Demos a conocer, además, que toda función $f(x)$, absolutamente integrable en todo el eje numérico, genera también, según la fórmula (59.26), una funcional continua lineal sobre S. En efecto, por cuanto toda función $\varphi \in S$ está acotada, la existencia de la integral (59.26) en este caso se infiere de la desigualdad

$$\int_{-\infty}^{+} |f(x)\varphi(x)|\,dx \leqslant \sup_{-\infty < x < +\infty} |\varphi(x)| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx.$$

Ejercicios. 19. Demuéstrese que la funcional (59.26) es lineal y continua sobre el espacio S (tanto en el caso en que la función f es de crecimiento lento en el infinito, como cuando sea absolutamente integrable en todo el eje numérico).

20. Demuéstrese que la función generalizada $\frac{1}{x + i0} \in D'$ (véase el ejercicio 8) es prolongable al elemento de espacio S.

*) Tales funciones se llaman funciones de crecimiento lento, de donde proviene el término "funciones generalizadas de crecimiento lento"

El conjunto S' forma un espacio lineal con convergencia, conjugado de S (véase el p. 59.2).

Por cuanto para cualquier función $\varphi \in S$ tendremos $\varphi' \in S$, entonces para las funciones generalizadas del espacio S', al igual que para las funciones generalizadas de D', puede hallarse la derivada f' según la fórmula

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'), \quad \varphi \in S.$$

De este modo, para cualquier función generalizada $f \in S'$ la derivada f' siempre existe y $f' \in S'$. Además, las derivadas de la función generalizada f en el elemento $\varphi \in D$, consideradas como derivadas en los espacios D' y S', respectivamente, coinciden. Igual que en el caso del espacio D', en el espacio S' la derivada del límite siempre existe y es igual al límite de las derivadas.

59.6. TRANSFORMACIÓN DE FOURIER EN EL ESPACIO S

Toda función $\varphi \in S$ es absolutamente integrable. Más aún, si $\varphi \in S$, entonces, cualquiera que sea $k = 1, 2, \dots$, la función $x^k\varphi(x)$ es también absolutamente integrable en todo el eje numérico. En efecto, por cuanto para la función $\varphi \in S$ se cumple la condición (59.23), se tiene

$$|x^k\varphi(x)| \leqslant c_{k,0},$$
$$x^2|x^k\varphi(x)| = |x^{k+2}\varphi(x)| \leqslant c_{k+2,0}$$

y, por esta razón,

$$|x^k\varphi(x)| \leqslant \frac{c_{k,0} + c_{k+2,0}}{1 + x^2}. \tag{59.27}$$

En el segundo miembro de esta desigualdad figura una función absolutamente integrable en todo el eje numérico, por consiguiente, de acuerdo con el criterio de comparación para las integrales impropias, la función $x^k\varphi(x)$ es también absolutamente integrable para todo $k = 0, 1, 2, \dots$. De aquí se desprende que para las funciones $\varphi \in S$ existe la transformación clásica de Fourier

$$\hat{\varphi} = F[\varphi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{-ixy}\,dx, \ \varphi \in S \tag{59.28}$$

como también la transformación de Fourier inversa

$$F^{-1}[\varphi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)e^{ixy}\,dy, \quad \varphi \in S.$$

El carácter clásico de la transformación de Fourier se entiende aquí en el sentido de que las integrales escritas son ordinarias y absolutamente convergentes, y no son integrales en el sentido del valor principal (véase el p. 56.3). Sobre S son válidas las fórmulas de inversión para la transformación directa e inversa de Fourier (véase el p. 56.5):

$$F[F^{-1}[\varphi]] = \varphi, \quad F^{-1}[F[\varphi]] = \varphi, \quad \varphi \in S. \tag{59.29}$$

Observemos que, por ejemplo, la segunda de estas fórmulas en la forma integral tiene por expresión

$$F^{-1}[\hat{\varphi}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(y)e^{ixy}\,dy = \varphi(x).$$

Teorema 1. *La transformación de Fourier y la transformación de Fourier inversa aplican el espacio S sobre sí de manera biunívoca, lineal y continua.*

DEMOSTRACIÓN. Señalemos que si $\varphi \in S$, entonces también $\hat{\varphi} \in S$.

Ante todo, de lo que para toda función $\varphi \in S$ la función $x^k\varphi(x)$ con $k = 0, 1, 2, \dots$ es, según se ha probado anteriormente, absolutamente integrable en todo el eje numérico, proviene, de acuerdo con el teorema 4 del p. 56.10, que la transformación de Fourier $\hat{\varphi} = F[\varphi]$ de la función φ existe y represneta en sí una función infinitamente derivable.

Estimemos ahora la función $|y^n\hat{\varphi}^{(m)}(y)|$, donde n y m son los números enteros no negativos. Aplicando las fórmulas para la derivada de la transformación de Fourier (véase el p. 56.10) y para la transformación de Fourier de la derivada (véase el p. 56.8), obtendremos

$$|y^n\hat{\varphi}^{(m)}(y)| = |y^nF^{(m)}[\varphi]| = |y^nF[x^m\varphi]| =$$
$$= |F[(x^m\varphi)^{(n)}]| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x^m\varphi(x))^{(n)}e^{-ixy}\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |(x^m\varphi(x))^{(n)}|\,dx.$$

Observemos que la expresión $[x^m\varphi(x)]^{(n)}$ representa, en virtud de las reglas de derivación, una combinación lineal de las expresiones del tipo $x^p\varphi^{(q)}(x)$, donde p y q son enteros no negativos y, de acuerdo con lo notado anteriormente, $\varphi^{(q)} \in S$. Por ello (véase (59.27)), las funciones $(1 + x^2)x^p\varphi^{(q)}$ están acotadas en todo el eje numérico, por lo cual está acotada también la función $(1 + x^2)\,[x^m\varphi(x)]^{(n)}$, es decir,

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} (1 + x^2)|[x^m\varphi(x)]^{(n)}| < +\infty.$$

Ahora, dividamos y multipliquemos la expresión subintegral obtenida por $1 + x^2$, entonces, teniendo presente que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \pi$, llegamos a que

$$|y^n\hat{\varphi}^{(m)}(y)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_x (1 + x^2)|(x^m\varphi(x))^{(n)}| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sup_x (1 + x^2)|(x^m(x))^{(n)}|. \tag{59.30}$$

Ya que a la derecha figura una magnitud finita, entonces $\hat{\varphi} \in S$.

Así pues, la transformación de Fourier aplica S en S y esta aplicación es biunívoca (véase el lema 3 en el p. 56.5).

Análogamente se demuestra también que la transformación de Fourier inversa F^{-1} aplica S en S y, además, biunívocamente. Es fácil convencerse de que estas aplicaciones se realizan en realidad sobre el espacio S, es decir, son las biyecciones. Esto se deduce directamente de las fórmulas de reciprocidad (59.29) para las transformaciones directa e inversa de Fourier *).

Efectivamente, probemos que $F(S)$ coincide con todo el espacio S. Sea $\psi \in S$ y pongamos $\varphi = F^{-1}[\psi]$.

En este caso

$$F[\varphi] = F[F^{-1}[\psi]] = \psi.$$

De un modo semejante se demuestra también que

$$F^{-1}(S) = S.$$

La linealidad de la transformación de Fourier se ha demostrado antes (véase el lema 2 en el p. 56.5).

Demostremos ahora la continuidad de la aplicación F.

Probemos al principio su continuidad en el cero. Sea $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = 0$ en S. Entonces, de (59.30) se deduce que

$$|y^n \hat{\varphi}_k^{(m)}(y)| \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sup_x (1 + x^2)|x^m \varphi_k(x))^{(n)}|, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Pero de (59.24) (para $\varphi(x) = 0$) tenemos

$$\lim_{k\to\infty} \sup_x (1 + x^2)\,|(x^m\varphi_k(x))^{(n)}| = 0;$$

por lo cual

$$\lim_{k\to\infty} \sup_y |y^n\hat{\varphi}_k^{(m)}(y)| = 0, \text{ es decir, } \lim_{k\to\infty} \hat{\varphi}_k = 0 \text{ en } S.$$

Por cuanto la transformación de Fourier es una aplicación lineal del espacio lineal S en sí mismo, continua en el cero, será continua también en todos los puntos de este espacio (véase el lema 3 en el p 59.2).

De este modo, la transformación de Fourier F aplica continuamente S sobre S.

Del modo enteramente análogo se demuestra la continuidad de la transformación de Fourier inversa F^{-1}. □

---

*) Observemos en adición que de lo que $F(S) = F^{-1}(S) = S$ se deduce que en las fórmulas (59.29) todas las integrales existen en el sentido habitual, y no sólo en el sentido del valor principal (compárese con el p. 56.5)

59.7. TRANSFORMACIÓN DE FOURIER DE LAS FUNCIONES GENERALIZADAS

Demostremos previamente una igualdad integral. Supongamos que la función f es continua y absolutamente integrable en todo el eje numérico y sea $\varphi \in S$, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-ixy}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{-ixy}\,dx. \tag{59.31}$$

Esto se deduce del teorema 7 del p. 54.3. En efecto, la integral reiterada en el primer miembro existe, pues existe la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\varphi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-ixy}\,dy\right| dx \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\,dy.$$

Si $[a, b]$ es un segmento arbitrario, la función f, siendo continua, está acotada en $[a, b]$: $|f(x)| \leqslant M$; por esta razón

$$|f(y)\varphi(x)e^{-ixy}| \leqslant M|\varphi(x)|, \quad a \leqslant y \leqslant b.$$

De aquí, por ser convergente la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(y)|\,dx$, proviene la convergencia uniforme de la integral $f(y) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{-ixy}\,dx$ en el segmento $[a, b]$.

Luego, $|\varphi(x)| \leqslant c_{0,0}$, $-\infty < x < +\infty$ (véase (59.23)); por eso $|\varphi(x)f(y)e^{-ixy}| \leqslant c_{0,0}\,|f(y)|$, y, como la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\,dy$ converge, la integral

$$\varphi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-ixy}\,dy$$

converge uniformemente en todo el eje.

Por fin, la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)f(y)e^{-ixy}|\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy$$

es finita, razón por la cual en el caso que se considera están cumplidas todas las condiciones del teorema 7 (p. 54.3) y, por ende, puede permutarse el orden de integración. La igualdad (59.31) queda demostrada.

Si la función $F[f]$ engendra cierta funcional sobre S (por ejemplo, satisface la condición (59.25) o es absolutamente integrable en todo el eje numérico), entonces, al multiplicar la igualdad (59.31) por $1/\sqrt{2\pi}$, obtendremos

$$(F[f], \varphi) = (f, F([\varphi]), \quad \varphi \in S. \tag{59.32}$$

Esta fórmula la tomaremos como definición de la transformación de Fourier de funciones generalizadas pertenecientes al espacio S'

Definición 23. *Se llama transformación de Fourier de una función generalizada $f \in S'$ una funcional $F[f]$ definida por la fórmula* (59.32).

Así pues, para cualquier función generalizada f de S' está definida su transformación de Fourier $F[f]$: el valor de la funcional $F[f]$ en todo punto φ del espacio S es igual al valor de la funcional f en el punto $F[\varphi] \in S$.

Como ejemplo, hallemos la transformación de Fourier de la unidad, considerándola como una función generalizada. Evidentemente, $1 \in S'$. Tenemos

$$(\hat{1}, \varphi) = (1, \hat{\varphi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ixy}\, dx =$$

$$= \sqrt{2\pi}\, \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{iy(t-x)}\, dx \Big|_{t=0} =$$

$$= \sqrt{2\pi}\, \varphi(t) \Big|_{t=0} = \sqrt{2\pi}\, (\delta, \varphi)$$

(aquí hemos aprovechado el lema 1 del p. 56.5). De este modo, $\hat{1} = \sqrt{2\pi}\delta$.

Observemos que la transformación de Fourier $F[\varphi]$ de la función $\varphi \in D$, no pertenece, en el caso general, al espacio D, por cuanto $F[\varphi]$ no es siempre una función finita. Por eso la fórmula (59.32) tiene sentido no para todas las $f \in D'$. Precisamente debido a esta circunstancia, al considerar la transformación de Fourier de las funciones generalizadas, tuvimos que hacer más estrecha la clase de funciones generalizadas introducidas anteriormente, limitándonos sólo a las funciones generalizadas de crecimiento lento.

La transformación de Fourier $F[f]$ de una función generalizada f se designará por el símbolo $\hat{f}$ o el símbolo

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\, dx.$$

De este modo, la igualdad

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\, dx = F[f] \qquad (59.33)$$

es, cuando f es una función generalizada, la definición del símbolo que figura en el primer miembro de esta igualdad.

Al definir la transformación de Fourier para todas las funciones generalizadas de S', hemos definido también, en particular, la transformación de Fourier para las funciones ordinarias f que satisfacen la condición (59.25), es decir, para las funciones de una clase mucho más amplia en comparación con lo hecho anteriormente (véase el p. 56.5 y 58.7*). Esto constituye una ciercunstancia más que justifica la conveniencia de introducción del concepto de funciones generalizadas.

Mostremos que la transformación de Fourier de las funciones generalizadas posee toda una serie de propiedades análogas a las de la transformación de Fourier clásica, es decir, de la transformación de Fourier de las funciones absolutamente integrables.

Lema 7. *La transformación de Fourier $F[f]$ de una función generalizada $f \in S'$ es también una función generalizada de la clase S', es decir, $F[f]$ es una funcional continua y lineal sobre el espacio S.*

DEMOSTRACIÓN. Comprobemos la linealidad de la transformación de Fourier, es decir, probemos que, cualquiera que sea la función generalizada $f \in S'$, para cualesquiera funciones $\varphi \in S$, $\psi \in S$ y cualesquiera números λ y μ se verifica la igualdad

$$(F[f], \lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda(F[f], \varphi) + \mu(F[f], \psi).$$

En efecto,

$$(F[f], \lambda\varphi + \mu\psi) = (f, F[\lambda\varphi + \mu\psi]) =$$
$$= (f, \lambda F[\varphi] + \mu F[\psi]) = \lambda(f, F[\varphi]) + \mu(f, F[\psi]) =$$
$$= \lambda(F[f], \varphi) + \mu(F[f], \psi).$$

Comprobemos la continuidad de la transformación de Fourier. Sea $f \in S'$, $\varphi \in S$, $\varphi_n \in S$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim_{n \to \infty} \varphi_n = \varphi$, y por lo tanto (véase el teorema 1 del p. 59.6),

$$\lim_{n \to \infty} F[\varphi_n] = F[\varphi].$$

Entonces, por ser la funcional f continua en S, obtenemos

$$\lim_{n \to \infty} (F[f], \varphi_n) = \lim_{n \to \infty} (f, F[\varphi_n]) = (f, F[\varphi]) = (F[f], \varphi).$$

Hemos probado, pues que si $f \in S'$, entonces también $F[f] \in S'$. □

Del modo natural se define también la transformación de Fourier inversa $F^{-1}[f]$ del elemento $f \in S'$, como una funcional del espacio S', definida por la fórmula

$$(F^{-1}[f], \varphi) = (f, F^{-1}[\varphi]), \quad \varphi \in S.$$

Si f es una función absolutamente integrable, dicha igualdad se verifica para esta función en el sentido corriente. Esto se comprueba igual que en el caso de la fórmula (59.31). Por definición, se presupone también que (compárese con (59.33))

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixy}\, dx = F^{-1}[f]. \qquad (59.34)$$

Lo mismo que en el caso de una transformación de Fourier directa F, se muestra que si $f \in S'$, entonces también $F^{-1}[f] \in S'$.

Teorema 2. *La transformación de Fourier F y la transformación de Fourier inversa F^{-1} aplican lineal, biunívoca y continuamente el espacio S' sobre sí mismo; además, para cualquier elemento $f \in S'$ se verifican las igualdades*

$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f. \qquad (59.35)$$

DEMOSTRACIÓN. Demostremos primero las fórmulas (59.35). Para cualquier elemento $\varphi \in S$ se tiene

$$(F^{-1}[F[f]], \varphi) = (F[f], F^{-1}[\varphi]) = (f, F[F^{-1}[\varphi]]) = (f, \varphi).$$

Por analogía,

$$(F[F^{-1}[f]], \varphi) = (F^{-1}[f], F[\varphi]) = (f, F^{-1}[F[\varphi]]) = (f, \varphi).$$

Mostremos ahora que la transformación de Fourier F aplica el espacio S' sobre todo el espacio S': $F(S') = S'$. Sea $g \in S'$, entonces si $f = F^{-1}[g]$, se tiene $F[f] = F[F^{-1}[g]] = g$, es decir, realizándose la transformación de Fourier F, en cualquier elemento de S' se aplica cierto elemento de S'.

Mostremos que F es biunívoca. Si $f_1 \in S'$, $f_2 \in S'$ y $F[f_1] = F[f_2]$, entonces también $F^{-1}[F[f_1]] = F^{-1}[F[f_2]]$, de donde, en virtud de (59.35), se tiene $f_1 = f_2$.

Señalemos que la aplicación F es lineal, es decir, que para cualesquiera funciones generalizadas $f \in S'$, $g \in S'$ y cualesquiera números λ y μ se verifica la igualdad

$$F[\lambda f + \mu g] = \lambda F[f] + \mu F[g].$$

Con el fin de convencernos de la validez de esta igualdad, comprobémosla para cualquier elemento $\varphi \in S$, siempre que sea éste fijo.

$$(F[\lambda f + \mu g], \varphi) = (\lambda f + \mu g, F[\varphi]) = \lambda(f, F[\varphi]) + \mu(g, F[\varphi]) =$$

$$= \lambda(F[f], \varphi) + \mu(F[g], \varphi) = (\lambda F[f] + \mu F[g], \varphi).$$

Por fin, demostremos que F es una aplicación continua. En efecto, sea $f \in S'$, $f_n \in S'$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim f_n = f$, y, por consiguiente, para cualquier $\varphi \in S$ se verifica la igualdad $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi)$. En tal caso

$$\lim_{n\to\infty} (F[f_n], \varphi) = \lim_{n\to\infty} (f_n F[\varphi]) = (f, F[\varphi]) = (F[f], \varphi).$$

Análogamente se demuestra que también F^{-1} aplica continua y biunívocamente S' sobre S'. □

Ejemplos. Hallemos $F[\delta] = \hat{\delta}$. Tenemos

$$(\hat{\delta}, \varphi) = (\delta, \hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ixy}\, dx \Big|_{y=0} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi\right), \quad \varphi \in S,$$

por lo cual $F[\delta] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, y por lo tanto, $F^{-1}[1] = \sqrt{2\pi}\delta$ (observemos que la transformación de Fourier inversa clásica $F^{-1}[1]$, al igual que la transformación directa $F[1]$, no existen). Con ayuda de las integrales (59.33) y (59.34) estas fórmulas

pueden escribirse en la forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-ixy}\, dx = 1, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\, dx = \delta(y).$$

De modo igual se halla también la transformación de Fourier inversa de la función delta:

$$F^{-1}[\delta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = F[\delta],$$

de donde

$$F[1] = F^{-1}[1] = \sqrt{2\pi}\delta.$$

Al hacer uso de la notación basada sobre las igualdades (59.33) y (59.34), estas fórmulas pueden escribirse en la forma

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}\, dx = \delta(y), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{ixy}\, dx = 1.$$

Calculemos ahora la transformación de Fourier de la derivada de una función generalizada y la derivada de la transformación de Fourier. Previamente hemos de introducir el concepto de producto de una función generalizada $f \in S'$ por una función habitual infinitamente derivable $\psi(x)$ que posee la propiedad de que para cualquiera de sus derivadas $\psi^{(n)}(x)$ existen unas constantes $\beta_n > 0$ y $\alpha_n > 0$, $n = 0, 1, \ldots$, tales que para todos los x se verifica la desigualdad

$$|\psi^{(n)}(x)| \leqslant \beta_n(1 + |x|)^{\alpha_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .^{*)} \tag{59.36}$$

Señalemos que todos los polinomios satisfacen esta condición.

Si la función ψ es del tipo (59.36) y $\varphi \in S$, entonces $\psi\varphi \in S$. Si la función f es localmente sumable y satisface la condición (59.25), mientras que la función ψ satisface la condición (59.36), entonces ψf satisface también la condición (59.25) y

$$(f, \psi\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi(x)\varphi(x)\, dx = (\psi f, \varphi).$$

Supongamos que ψ satisface la condición (59.36) y $f \in S'$. Definamos ahora la funcional sobre S, igual al producto ψf, mediante la fórmula

$$(\psi f, \varphi) = (f, \psi\varphi), \quad \varphi \in S.$$

Es fácil comprobar que $\psi f \in S'$ **), es decir, ψf es una funcional lineal continua de-

*) En virtud de esta condición (para $n = 0$), $\psi(x)$ puede considerarse como una función generalizada del espacio S' (véase (59.25)).

**) Las complicaciones que aparecen al determinar el producto de las funciones generalizadas se deben a que el producto de las funcionales lineales en el sentido habitual como un producto de funciones (es decir, como producto de los valores de factores en todo punto) no es una funcional lineal.

finida sobre el espacio S.

Ejercicio 21. Supongamos que la función $\psi = \psi(x)$ satisface la condición (59.36) y la función generalizada $f \in S'$. Demuéstrese que $\psi f \in S'$.

Demostraremos en conclusión las fórmulas

$$F[f^{(n)}] = (ix)^n F[f], \qquad (59.37)$$

$$i^n F^{(n)}[f] = F[x^n f], \quad f \in S'. \qquad (59.38)$$

Tenemos (véase el p. 56.8):

$$(F[f^{(n)}], \varphi) = (f^{(n)}, F[\varphi]) = (-1)^n (f, F^{(n)}[\varphi]) =$$

$$= (-1)^n \left(f, \frac{1}{i^n} F[x^n \varphi]\right) = i^n (F[f], \quad x^n \varphi) = ((ix)^n F[f], \varphi), \quad \varphi \in S.$$

La fórmula (59.37) está demostrada.

Demostremos (59.38) (véase el p. 56.10):

$$(F^{(n)}[f], \varphi) = (-1)^n (F[f], \varphi^{(n)}) = (-1)^n (f, F[\varphi^{(n)}]) =$$

$$= (-1)^n (f, (ix)^n F[\varphi]) = \frac{1}{i^n} (x^n f, F[\varphi]) = \left(\frac{1}{i^n} F[x^n f], \varphi\right). \ \square$$

Ejemplo. Hallemos la transformación de Fourier de la función $f(x) = x$:

$$F[x] = F[x \cdot 1] = iF'[1] = i\sqrt{2\pi}\delta'$$

Ejercicio 22. Hállese la transformación de Fourier de un polinomio.

Al calcular una transformación de Fourier de las funciones generalizadas resulta a veces conveniente elegir una sucesión de funciones ordinarias que en el espacio S' tienden a una función (generalizada) dada, hallar la transformación de Fourier de los términos de dicha sucesión y después calcular la transformación de Fourier buscada de la función dada pasando al límite y aprovechando la continuidad de la transformación de Fourier. Así por ejemplo, para calcular la transformación de Fourier $F[\theta]$ de la función de Heaviside $\theta(x)$, hallemos primero la transformación de Fourier de la función $\theta(x)e^{-tx}$ $(t > 0)$.

$$F[\theta(x)e^{-tx}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x(t+iy)}\, dx = -\frac{e^{-x(t+iy)}}{\sqrt{2\pi}(t+iy)} \Bigg|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(t+iy)} = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}(y-it)}. \qquad (59.39)$$

Probemos ahora que en S'

$$\lim_{t \to +0} \theta(x)e^{-tx} = \theta(x) \qquad (59.40)$$

En efecto, para toda función $\varphi \in S$ y cualquier número A se tiene

$$|(\theta(x), \varphi(x)) - (\theta(x)e^{-tx}, \varphi(x))| = \left| \int_0^{+\infty} (1 - e^{-tx})\varphi(x)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_0^A (1 - e^{-tx})\varphi(x)\, dx \right| + \left| \int_A^{+\infty} (1 - e^{-tx})\varphi(x)\, dx \right|. \qquad (59.14)$$

Fijemos la función $\varphi \in S$ y un número cualquiera $\varepsilon > 0$. Por ser la función φ absolutamente integrable, existe un número $A > 0$ tal que

$$\int_A^{+\infty} |\varphi(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2};$$

entonces

$$\left| \int_A^{+\infty} (1 - e^{-tx})\varphi(x)\, dx \right| \leqslant \int_A^{+\infty} |\varphi(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (59.42)$$

Elijamos ahora $t_0 > 0$ de modo tal que para $0 < t < t_0$ sea válida la desigualdad

$$(1 - e^{-tA}) \int_0^A |\varphi(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

y, por consiguiente,

$$\left| \int_0^A (1 - e^{-tx})\varphi(x)\, dx \right| < (1 - e^{-tA}) \int_0^A |\varphi(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (59.43)$$

Entonces, para $0 < t < t_0$, de (59.41), (59.42) y (59.43) obtenemos

$$|(\theta(x), \varphi(x)) - (\theta(x)e^{-tx}, \varphi(x))| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

La fórmula (59.40) queda demostrada.

Por ser la transformación de Fourier continua, tenemos

$$\lim_{t \to +0} F[\theta(x)e^{-tx}] = F[\theta(x)]; \qquad (59.44)$$

de aquí y de (59.39) tenemos

$$F[\theta(x)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{t \to +0} \frac{i}{y - it},$$

con la particularidad de que de (59.44) proviene que el límite en el segundo miembro existe (en el espacio S'), este límite se designa, corrientemente, por $\frac{i}{y - i0}$ (véase el ejercicio 8).

De este modo,

$$F[\theta(x)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{y - i0}.$$

Ejercicio 23. Hállese la transformación de Fourier de las funciones $x^k\theta(x)$, $k = 1, 2, \ldots$.

COMPLEMENTO

§ 60. ALGUNOS PROBLEMAS DE LOS CÁLCULOS APROXIMADOS

60.1. APLICACIÓN DE LA FÓRMULA DE TAYLOR PARA EL CÁLCULO APROXIMADO DE LOS VALORES DE FUNCIONES E INTEGRALES

Para calcular los valores de las funciones resulta cómodo servirse de la fórmula de Taylor o serie de Taylor. Aclaremos esto con los ejemplos.

1. Cálculo del valor del seno.

La fórmula de Taylor para la función sen x tiene por expresión

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + r_n(x),$$

donde

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \operatorname{sen}^{(2n+1)} \theta x, \quad 0 < \theta < 1$$

(el término residual se ha tomado en la forma de Lagrange). Por esto

$$|r_n(x)| < \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{60.1}$$

Supongamos que se pide hallar sen 20° con un error inferior a 10^{-3}. A 20° medidos en radianes corresponde la magnitud $\frac{\pi}{9}$, por lo cual elijamos el número n de modo tal que sea

$$\left| r_n\left(\frac{\pi}{9}\right) \right| < \frac{1}{10^3}; \tag{60.2}$$

entonces el valor del polinomio de Taylor de orden n en el punto $x = \frac{\pi}{9}$ nos dará la aproximación buscada de sen 20°. En virtud de la desigualdad (60.1), para que se cumpla la condición (60.2), es suficiente que se verifique la desigualdad

$$\frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^{2n+1} < \frac{1}{10^3}. \tag{60.3}$$